

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЛЯПУНОВСКОГО МОДАЛЬНОГО АНАЛИЗА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДВУХРАЙОННОЙ ТЕСТОВОЙ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

**Кутяков Е.Ю., Душин С.В., Исаков А.Б., Абраменков А.Н.**

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*

evgeniykutyaakov@gmail.com, s.dushin@inbox.ru, isk\_alex@mail.ru, aabramenkov@asmon.ru

*Аннотация: Изучены свойства нового подхода к модальному анализу, основанного на спектральном разложении функций Ляпунова и названного Ляпуновским модальным анализом. Предложенный подход применен для исследования динамических характеристик двухрайонной четырехгенераторной электроэнергетической системы и ее статической устойчивости. Показано, что Ляпуновский модальный анализ обладает удобным инструментарием для определения момента потери устойчивости и обнаружения слияния и разделения мод системы при изменении нагрузки.*

Ключевые слова: модальный анализ, факторы участия, функции Ляпунова, спектральные разложения, статическая устойчивость, электроэнергетические системы.

### **Введение**

Современные *электроэнергетические системы* представляют собой большие распределенные системы, состоящие из множества сложных компонентов, таких как синхронные генераторы, первичные двигатели (паровые, гидравлические, ветряные турбины), трансформаторы, выключатели, линии электропередач и т.д. Слабые связи между генераторами, дисбаланс мощности и некорректно настроенные цепи обратной связи оказывают нежелательное влияние на динамические характеристики системы. В частности, это может приводить к возникновению в

системе слабо затухающих колебаний, а также к потере синхронности генераторов, что неприемлемо для нормальной работы всей системы. В результате в системе могут возникать перенапряжения и отключения электроэнергии, влекущие за собой повреждение компонентов энергосистемы и оборудования потребителя.

Анализ динамических характеристик и устойчивости электроэнергетических систем (ЭЭС), особенно в режиме реального времени, представляет собой серьезную проблему, поскольку система является крупномасштабной, содержит существенную нелинейность и состоит из множества сложных компонентов. На сегодняшний день одним из наиболее эффективных средств оценки динамических свойств систем такого типа является *модальный анализ*, основанный на изучении свойств системы в частотной области с использованием собственных значений и собственных векторов матрицы динамики. В настоящее время ведётся активная работа по улучшению инструментов модального анализа. В результате появляются новые методы и подходы. Одним из перспективных направлений является *Ляпуновский модальный анализ* (ЛМА), предложенный в [1]. Он основан на спектральном разложении функций Ляпунова, которые выбираются таким образом, чтобы они определяли интегрированную энергию, связанную с конкретной собственной модой или переменной состояния. Ожидается, что этот подход позволит разработать индикаторы, которые будут иметь существенные преимущества в целях анализа статической устойчивости ЭЭС.

В этой работе изложены результаты исследования свойств ЛМА, применительно к анализу двухрайонной электроэнергетической системы, описанной в [2]. В частности, исследуется возможность ЛМА обнаруживать неустойчивые моды системы, устанавливать связь между модами и переменными состояниями, а также идентифицировать процессы слияния и разделения мод системы.

## 1 Модальный анализ динамических систем

Традиционный модальный анализ широко используется для описания поведения динамических систем и оценки их статической устойчивости. Этот метод основан на анализе спектра матрицы динамики системы. В случае, если система является существенно нелинейной, как, например, ЭЭС, для выполнения анализа на предмет ее статической устойчивости система предварительно линеаризуется. Изначально модальный анализ развивался как набор измерительных методов и вычислительных алгоритмов для быстрого поиска групп собственных значений и собственных векторов системы, которые представляют наибольший интерес с точки зрения конкретных прикладных задач. Среди известных методов поиска критических мод можно назвать QR-метод, метод обратных итераций, метод Ланцоша, модифицированный метод Арнольди и его модификации [3], [4]. В результате постоянного развития модальный анализ постепенно сделался мощным инструментом исследования спектральных характеристик динамических систем.

Собственные значения матрицы динамики имеют простую интерпретацию: они представляют собой частоту и коэффициент затухания колебаний, определяющих поведение системы. Таким образом, анализ собственных значений позволяет оценить динамические характеристики системы и ее устойчивость. Собственные векторы матрицы динамики определяют связь между собственными модами системы и ее переменными состояниями. Однако, эта связь может быть неоднозначной, поскольку собственные векторы зависят от единиц измерения переменных состояний. Подход *селективного модального анализа*, предложенный в [5], позволил установить однозначную связь между модами и переменными состояниями на основе так называемых *факторов участия*, которые не зависят от единиц измерения. Факторы участия (ФУ) и обобщенные участия определяются, соответственно, как:

$$(1) \quad p_{ki} = u_i^k v_i^k,$$

$$(2) \quad p_{kil} = u_i^k v_i^l,$$

где  $u_i^k$  –  $k$ -я компонента правого нормированного собственного вектора,  $v_i^l$ ,  $v_i^k$  – соответственно  $l$ -я и  $k$ -я компонента левого нормированного собственного вектора. Факторы участия позволяют однозначно выделить элементы структуры системы, связанные с собственными модами в динамике ее поведения.

ФУ в (1) характеризуют относительный вклад собственных мод системы в динамику переменных состояний, в связи с чем их также называют факторы участия *мод в состоянии* (или ФУМС). Для анализа участия *состояний в моде* (или ФУСМ) в [6] было предложено альтернативное определение ФУ, основанное на усреднении по неопределенному набору начальных условий системы. В дальнейшем концепция ФУ широко использовалась в энергетике и в других приложениях для анализа устойчивости, понижения размерности моделей динамических систем,

оптимального размещения датчиков и стабилизаторов и решения задач кластеризации. Интерпретация ФУ была расширена с точки зрения стохастического усреднения, модальной энергии, а также с точки зрения наблюдаемости, управляемости и мобильности. Аналогичные концепции ФУ были предложены для нелинейных динамических систем и для систем, описываемых алгебраическими уравнениями.

Альтернативный подход к модальному анализу был предложен в [7], [8], [9]. В этих работах решение уравнения Ляпунова было представлено в виде суммы эрмитовых матриц, соответствующих либо отдельным собственным значениям матрицы динамики, либо их парным комбинациям. Этот подход был объединен с модальным анализом в [1] под названием Ляпуновского модального анализа. В отличие от обычных факторов участия, предлагаемые *Ляпуновские факторы участия* характеризуют вклады мод системы и переменных состояния в соответствующие функции Ляпунова, которые определяют интегральную энергию, связанную с состояниями и модами на бесконечном или конечном интервале времени.

## 2 Ляпуновский модальный анализ

В этом разделе мы напомним определение некоторых показателей, предложенных в рамках Ляпуновского модального анализа в [1]. Рассмотрим линейную или линеаризованную автономную динамическую систему в окрестности точки равновесия. Уравнение этой системы может быть выражено как:

$$(3) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t),$$

где  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  – вектор возмущений переменных состояния, а  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  – матрица динамики.

Интегральная энергия возмущения, произведенная в переменных состояния во времени, может быть описана как:

$$(4) \quad E = \sum_{k=1}^n \int_0^{\infty} x_k^2(t) dt,$$

где  $x_k$  –  $k$ -я переменная состояния. Интегральная энергия (4), обусловленная начальным возмущением  $\mathbf{x}_0$ , может быть получена как функция Ляпунова:

$$(5) \quad E = \mathbf{x}_0^T \mathbf{P}_x \mathbf{x}_0, \quad \text{где} \quad \mathbf{A}^T \mathbf{P}_x + \mathbf{P}_x \mathbf{A} = -\mathbf{I}.$$

Величина  $E$  в (5) была названа в [1] *энергией Ляпунова* системы. Согласно [9], грамиан  $\mathbf{P}_x$  в (5) может быть разложен на спектральные компоненты следующим образом:

$$(6) \quad \mathbf{P}_x = \sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{P}}_i = \sum_{i,j=1}^n \mathbf{P}_{ij}, \quad \tilde{\mathbf{P}}_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_{ij},$$

где

$$(7) \quad \tilde{\mathbf{P}}_i = -\{\mathbf{R}_i^* (\lambda_i^* \mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}\}_H, \quad \mathbf{P}_{ij} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\mathbf{R}_i^* \mathbf{R}_j}{\lambda_i^* + \lambda_j} + \frac{\mathbf{R}_i \mathbf{R}_j}{\lambda_i + \lambda_j} \right\}_H$$

Оператор  $\{\cdot\}_H$  в (7) обозначает эрмитовую часть матрицы;  $\mathbf{R}_i$  и  $\mathbf{R}_j$  – матрицы вычетов, которые определяются как коэффициенты разложения резольвенты матрицы  $\mathbf{A}$ :

$$(8) \quad (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\mathbf{R}_1}{s - \lambda_1} + \frac{\mathbf{R}_2}{s - \lambda_2} + \dots + \frac{\mathbf{R}_n}{s - \lambda_n}$$

Модальный вклад  $i$ -й моды в энергию Ляпунова системы определяется следующим образом:

$$(9) \quad E_i = \mathbf{x}_0^T \tilde{\mathbf{P}}_i \mathbf{x}_0$$

Ляпуновская энергия модального взаимодействия (ЛЭМВ) для  $i$ -й и  $j$ -й мод может быть определена как

$$(10) \quad E_{ij} = \mathbf{x}_0^T \mathbf{P}_{ij} \mathbf{x}_0$$

По аналогии с обычными факторами участия, *Ляпуновские факторы участия* моды в состоянии (ЛФУМС) и состояния в моде (ЛФУСМ) можно определить формулами (11) и (12) соответственно.

$$(11) \quad e_{ki} = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{\mathbf{v}_i^* \mathbf{v}_j (u_i^k)^* u_j^k}{\lambda_i^* + \lambda_j} \right\} / \operatorname{Re} \left\{ \sum_{i',j=1}^n \frac{\mathbf{v}_{i'}^* \mathbf{v}_j (u_{i'}^k)^* u_j^k}{\lambda_{i'}^* + \lambda_j} \right\}$$

$$(12) \quad \varepsilon_{ki} = \frac{\mathbf{x}_0^T (\mathbf{v}_i^T)^* \mathbf{v}_i^k \mathbf{x}_k^0 + (\mathbf{v}_i^k)^* \mathbf{x}_k^0 \mathbf{v}_i^T \mathbf{x}_0}{2\mathbf{x}_0^T (\mathbf{v}_i^T)^* \mathbf{v}_i^T \mathbf{x}_0},$$

В отличие от традиционных факторов участия, Ляпуновский модальный анализ позволяет оценивать взаимодействие мод с помощью ЛЭМВ (10). Предполагая, что компоненты вектора

начальных условий  $x_0$  распределены независимо с нулевым средним и единичной дисперсией, усредненная ЛЭМВ может быть вычислена в виде

$$(13) E \{E_{ij}\} = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\operatorname{trace}(R_i^* R_j)}{\lambda_i + \lambda_j} + \frac{\operatorname{trace}(R_i^T R_j)}{\lambda_i + \lambda_j} \right\}$$

Отметим, что Ляпуновский модальный анализ предлагает некоторые дополнительные индикаторы, однако в данной работе будут рассмотрены только приведенные выше показатели, определяемые формулами (9) - (13).

### 3 Анализ двухрайонной электроэнергетической системы

#### 3.1 Описание исследуемой системы

Для изучения свойств ЛМА рассмотрим четырехгенераторную двухрайонную электроэнергетическую систему, описанную в [2], схема которой представлена на рисунке 1 ниже.

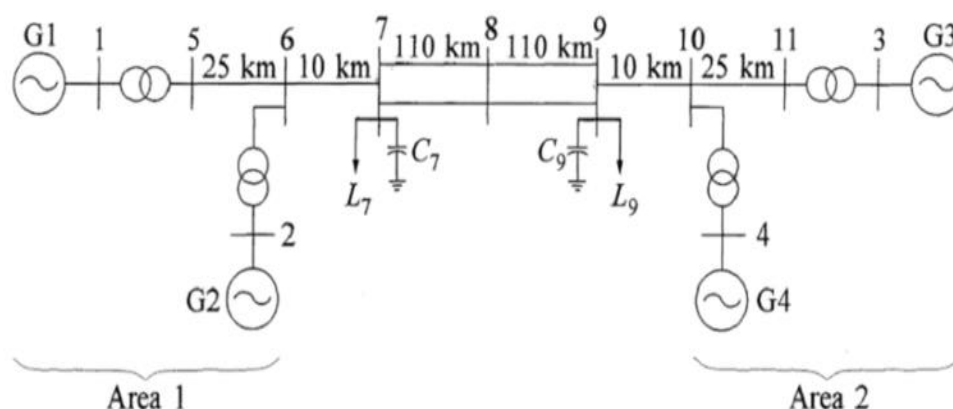


Рис.1. Схема исследуемой двухрайонной электроэнергетической системы.

Система состоит из двух областей, соединенных двумя линиями электропередач по 220 км. Каждая область содержит два синхронных генератора. Номинальная мощность каждого генератора составляет 900 МВА. Все генераторы имеют одинаковые параметры, за исключением их инерции. В области 1 коэффициент инерции обоих генераторов составляет  $H = 6,5$ , а в области 2 коэффициент инерции обоих генераторов составляет  $H = 6,175$ . Система имеет простые медленные регуляторы скорости внутри первичных двигателей (паровые турбины), при этом стабилизаторы в энергосистеме (power system stabilizers) не используются.

В рассматриваемом случае система устойчива, когда нагрузка в системе сравнительно мала, но при увеличении нагрузки, или ее асимметричном росте, система становится неустойчивой.

#### 3.2 Условия эксперимента и свойства системы

Начальные активные, индуктивные и емкостные нагрузки в обеих областях составляют 700 Вт, 100 МВА и 387 МВА соответственно. При таких нагрузках система устойчива. В ходе эксперимента активная нагрузка в области 2 увеличивается до 1600 Вт с шагом 30 Вт. Остальные параметры системы сохраняют исходные значения, которые описаны в [2].

На рисунке 2 представлены траектории действительных (сверху) и мнимых (снизу) частей слабо демпфированных собственных значений рассматриваемой системы при описанном увеличении нагрузки в области 2. Наиболее интересной комплексно-сопряженной парой собственных значений является пара M7/M8. Во время эксперимента эти собственные значения становятся неустойчивыми, когда их действительные части перемещаются в положительную область. Эта пара мод соответствует межрайонным колебаниям, возникающим между углами ротора всех четырех генераторов.

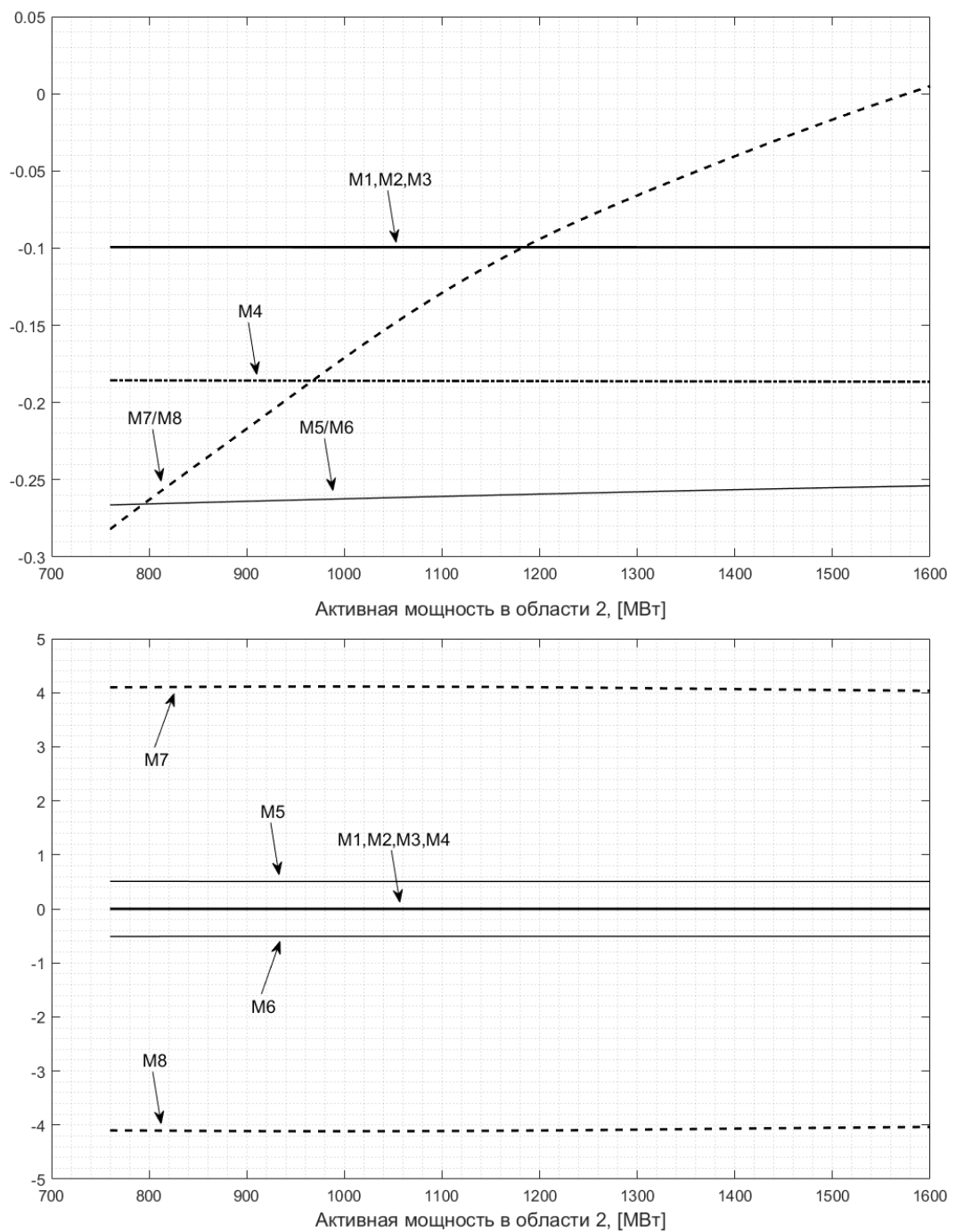


Рис. 2. Изменение действительной (верхний график) и мнимой (нижний график) части слабо демпфированных собственных чисел системы при изменении нагрузки.

Кроме этого, в рассматриваемой модели ЭЭС наблюдаются процессы слияния и разделения мод. Наиболее интересный случай показан на рисунке 3. Как видно, в диапазоне нагрузок от 760 МВА до 1360 МВА моды M34 и M35 представляют собой комплексно-сопряженную пару, однако при нагрузке более 1360 МВА происходит разделение этой пары. При этом мнимые части становятся равными нулю, и в системе появляются две новые апериодические моды. Аналогичные процессы можно наблюдать также для пар M36/M37 и M35/M36.

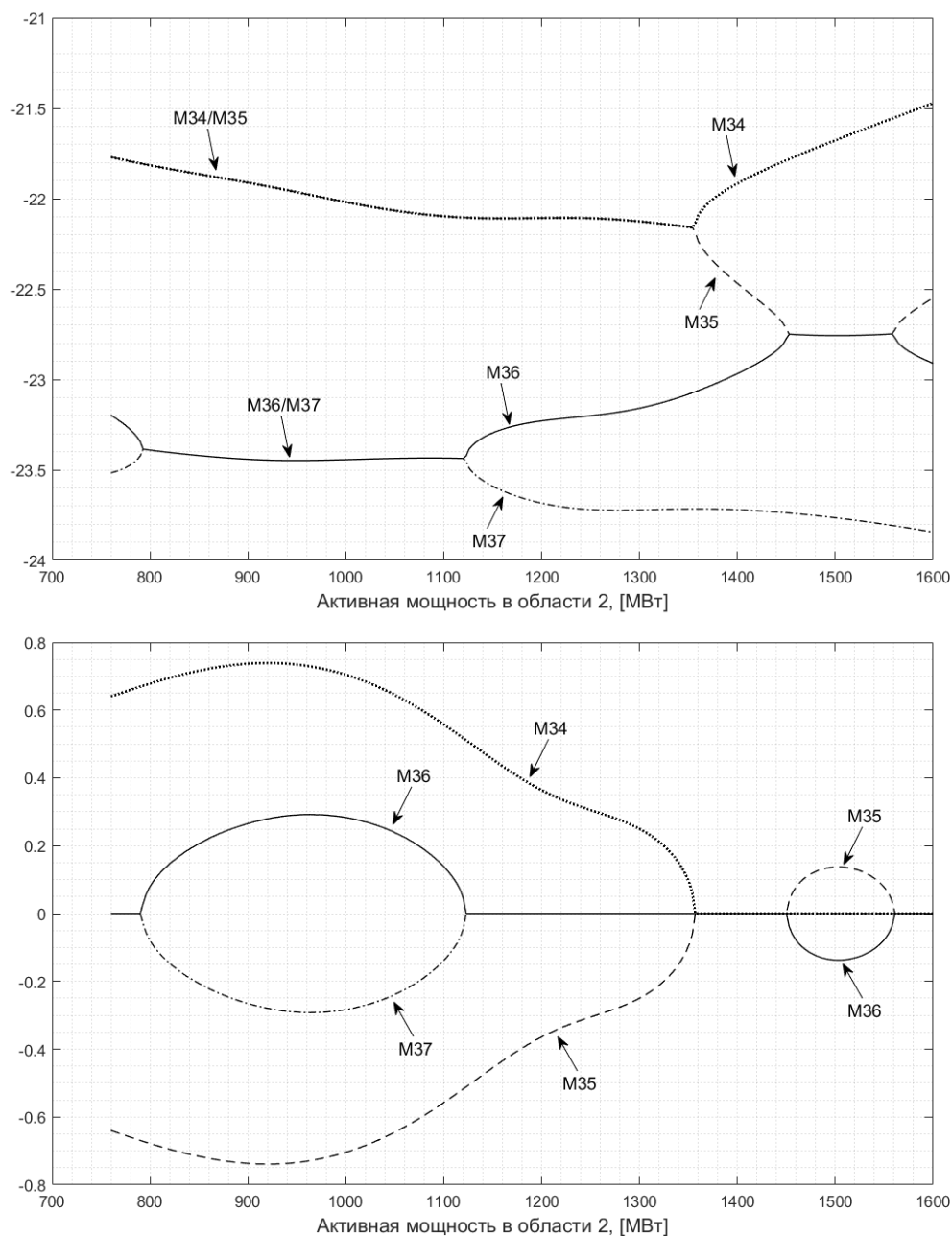


Рис. 3. Процессы слияния и разделения действительной (верхний график) и мнимой (нижний график) части собственных чисел системы при изменении нагрузки.

#### 4 Результаты численного эксперимента

##### 4.1 Обнаружение неустойчивых мод с применением Ляпуновских факторов участия

На рисунке 4 представлены традиционные ФУ, определенные в соответствии с (1), и Ляпуновские ФУ, определенные в соответствии с (11), для неустойчивой пары мод M7/M8. Традиционные ФУ (рисунок 4, верхний график) показывают, что моды M7/M8 имеют наибольшее участие в состоянии S7. Эта пара мод также имеет значительное участие в состояниях S16, S36, S38, S39. В остальных состояниях рассматриваемые моды участвуют с коэффициентом менее 0.1 и на графике не показаны. При рассмотрении Ляпуновских факторов участия (рисунок 4, нижний график) выясняется, что порядок переменных состояния с наиболее весомым вкладом моды M7/M8 сохраняется таким же как в случае традиционных ФУ. Однако, в отличие от классических факторов, величина Ляпуновских факторов сильно зависит от коэффициента затухания моды. В частности, ЛФУ увеличиваются по мере приближения системы к границе устойчивости, а в момент потери устойчивости достигают предельной величины, равной 1/2. Это означает, что в этот момент доля участия неустойчивых мод M7/M8 в энергии возмущения, накапливающейся в соответствующих переменных состояния (в данном случае S7, S16, S36, S38, S39), достигает 100%.

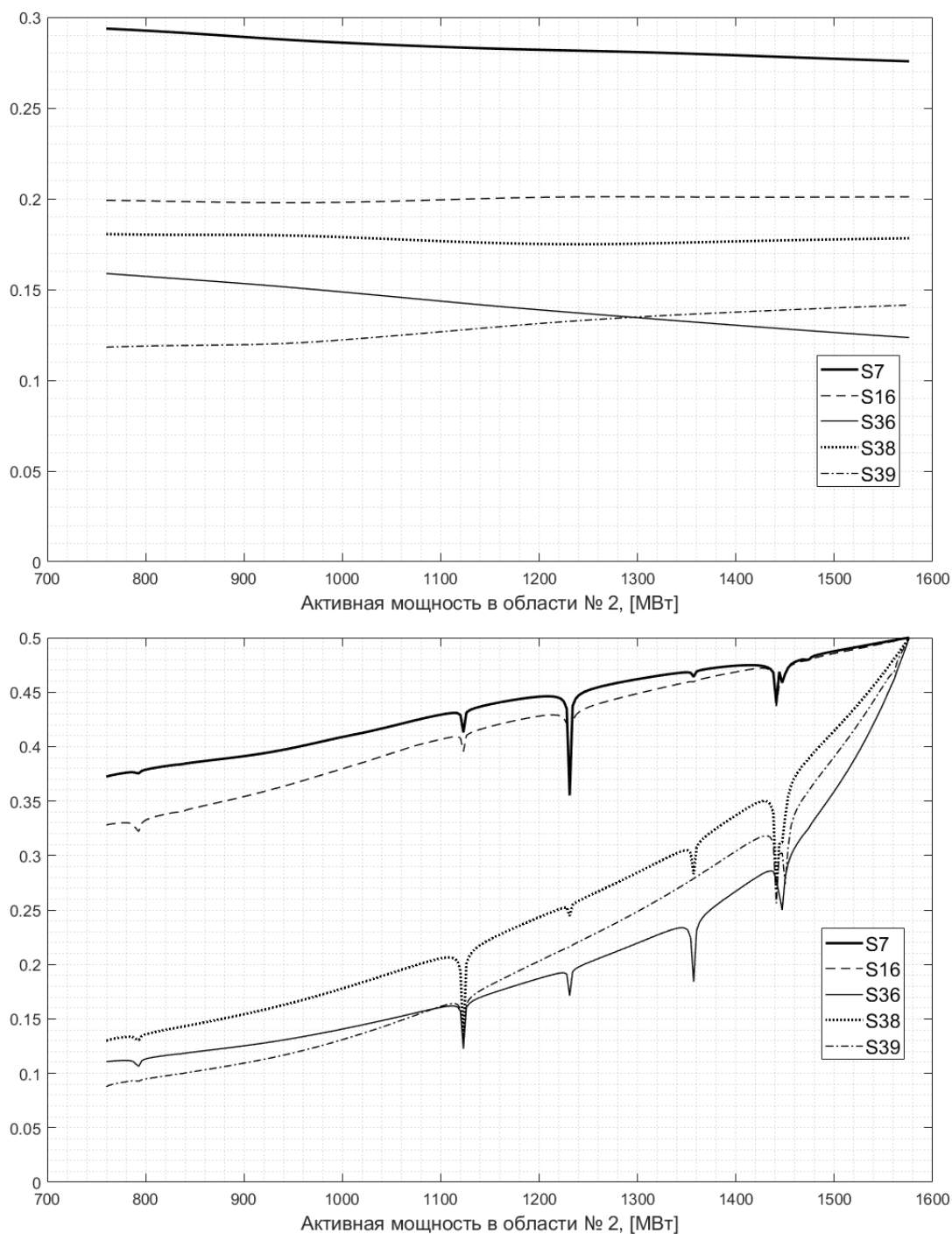


Рис. 4. Традиционные (верхний график) и Ляпуновские (нижний график) факторы участия моды в состоянии для неустойчивой пары мод M7/M8 (показаны состояния с наибольшими вкладами).

Для других слабо демпфированных мод, которые не теряют устойчивости во время эксперимента, ЛФУ значительно ниже предельного значения. Например, ЛФУ для собственной моды M1 показаны на рисунке 5.

Таким образом, ЛФУ мод в состояниях могут использоваться по аналогии с традиционными ФУ для оценки участия мод системы в конкретных переменных состояниях. Однако, в дополнение к этому, ЛФУ можно использовать как удобный индикатор для обнаружения собственных мод системы, приближающихся к границе устойчивости.

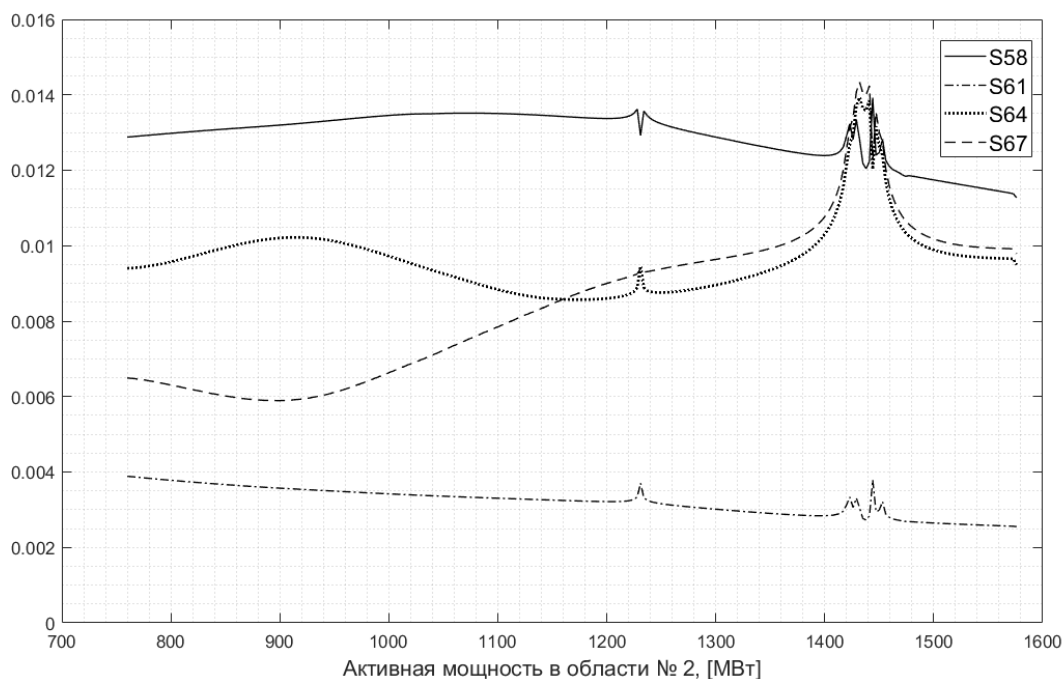


Рис.5. Характерный график Ляпуновских ФУ для устойчивой моды (на примере моды М1).

#### 4.2 Обнаружение процессов слияния и разделения мод с использованием Ляпуновской энергии модального взаимодействия

Для обнаружения слияния и разделения мод можно использовать усреднённую Ляпуновскую энергию модального взаимодействия (ЛЭМВ), определяемую в соответствии с (13). Поведение этого параметра в зависимости от активной нагрузки в области 2 для пар собственных мод М34/М35 и М36/М37 представлено на рисунках 6 и 7, соответственно.

Как показали исследования, слияние/разделение собственных мод приводит к локальному всплеску ЛЭМВ. В частности, для мод М34/М35 график ЛЭМВ имеет три пика. Первый пик имеет наибольшую амплитуду и соответствует разделению (действительной части) сопряженной пары с появлением двух апериодических мод. Два других всплеска соответствуют взаимодействию моды М35 с модой М36 (см. рисунок 3).

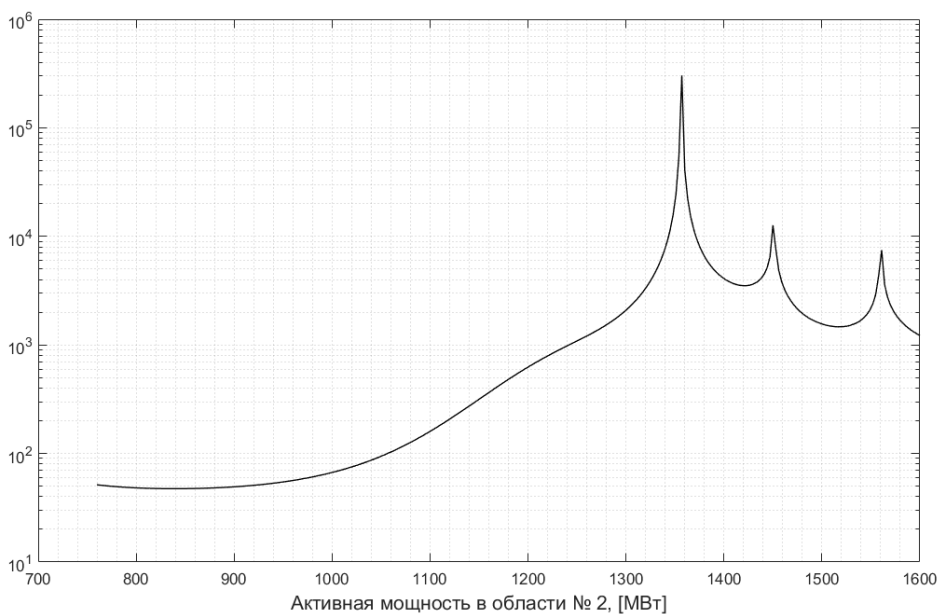


Рис. 6. Поведение Ляпуновской энергии модального взаимодействия для пары мод М34/М35.

График ЛЭМВ для пары мод М35/М36 имеет пять пиков. Два пика с наиболее высокими амплитудами соответствуют слиянию и разделению мод М35 и М36. Остальные пики



соответствуют процессам слияния/ разделения, в которых участвует только одна из рассматриваемой пары мод.

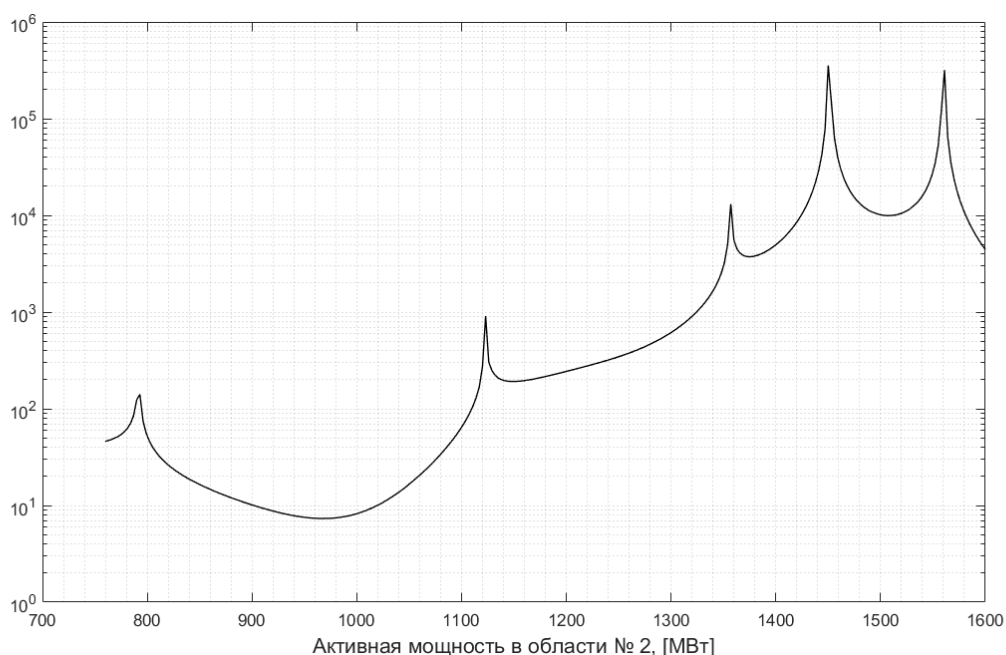


Рис. 7. Поведение Ляпуновской энергии модального взаимодействия для пары мод М35/М36.

## Заключение

В данной статье рассмотрены возможные преимущества предложенного в [1] Ляпуновского модального анализа (ЛМА) в сравнении с традиционным модальным анализом. В качестве тестовой модели использовалась четырехгенераторная двухрайонная электроэнергетическая система, предложенная в [2].

В экспериментальной части выполнено сравнение Ляпуновских факторов участия моды в состояниях с традиционными факторами участия. В целом, оба индикатора одинаково идентифицируют набор переменных состояния, в которых задействованы данные моды. Однако, в отличие от традиционных факторов участия, Ляпуновские факторы показывают рост участия тех мод, которые приближаются к границе своей устойчивости. Это можно объяснить тем фактом, что Ляпуновские ФУ характеризуют участие моды в энергии возмущения, накапливаемой в данной переменной во времени. Традиционные же ФУ характеризуют участие мод в мгновенной эволюции переменных состояния. Таким образом, Ляпуновские ФУ объединяют в одном показателе информацию о взаимосвязи мод с переменными состояниями, а также информацию об устойчивости этих мод. Эту же информацию можно получить, зная собственные значения и традиционные факторы участия, однако использование одного индикатора может быть более удобным.

В отличие от традиционного модального анализа, предложенный подход ЛМА позволяет оценивать парные модальные взаимодействия, используя показатель Ляпуновской энергии модального взаимодействия (ЛЭМВ). Экспериментально показано, что парные ЛЭМВ позволяют обнаруживать процессы слияния и разделения собственных мод в системе. Поскольку такие процессы могут предшествовать моменту потери устойчивости системы, их обнаружение может быть полезно для косвенного мониторинга слабо затухающих мод.

## Литература

1. *Iskakov A.B., Yadykin I.B.*, Lyapunov modal analysis and participation factors with applications to small-signal stability of power systems, arXiv:1909.02227 [math.OA], Sep. 2019.
2. *Kundur P.* Power Systems Stability and Control. McGraw-Hill: New York, 1994.
3. *Angelidis G., Semlyen A.*, Improved methodologies for the calculation of critical eigenvalues in small signal stability analysis // IEEE Trans. Power Syst. Vol. 11. No. 3. 1996. – P. 1209 – 1217.
4. *Rommers J., Martins N., and Freitas F.*, Computing rightmost eigenvalues for small-signal stability assessment of large-scale power systems // IEEE Trans. Power Syst. 2010. Vol. 25. No. 2. 2010. – P. 929 – 938.

5. *Perez-Arriaga I.J., Verghese G.C., and Schweppe F.C.*, Selective modal analysis with applications to electric power systems, Part I: Heuristic introduction // *IEEE Trans. Power Apparatus Syst.* Vol. 101. No. 9. 1982. – P. 3117-3125.
6. *Hashlamoun W.A., Hassouneh M.A., and Abed E.H.*, New results on modal participation factors: Revealing a previously unknown dichotomy // *IEEE Trans. Autom. Control.* Vol. 54. No. 7. 2009. – P. 1439-1449.
7. *Ядыкин И.Б.*, О свойствах грамианов непрерывных систем управления // *Автоматика и телемеханика.* № 6. 2010. – С. 39-50.
8. *Yadykin I.B., Iskakov A.B., Akhmetzyanov A.V.*, Stability analysis of large-scale dynamical systems by sub-Gramian approach // *Int. J. Robust Nonlin. Control.* Vol. 24. No. 8-9. 2014. – P. 1361-1379.
9. *Yadykin I.B., Iskakov A.B.*, Spectral Decompositions for the Solutions of Sylvester, Lyapunov, and Krein Equations // *Doklady Mathematics.* Vol. 95. No. 1. 2017. – P. 103-107.