

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НА ДОЛГОСРОЧНОМ ПЕРИОДЕ ИНВЕСТИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛИ GARCH-EVT-COPULA

Жукова Г.С.¹, Кагирова Д.Р.²

¹ Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации

² Московский политехнический университет

galsevzhukova@mail.ru, da_dinara@mail.ru

Аннотация: Данная работа посвящена моделированию инвестиционного портфеля пенсионных накоплений, а также прогнозированию доходностей портфеля при различных вариантах диверсификации на долгосрочном периоде инвестирования с использованием модели GARCH-EVT-COPULA. Результаты исследования и предложенная процедура оптимизации могут применяться в сфере управления активами и риск-менеджменте.

Ключевые слова: VaR, GARCH, Метод экстремальных значений, копула, обобщенное распределение Парето, Монте-Карло, оптимизация портфеля, пенсионные накопления.

Введение

Пенсионная система Российской Федерации характеризуется показателем коэффициента утраченного заработка ниже стандартов, установленных Международной организацией труда. В стране существует выраженная тенденция увеличения срока дожития граждан, что приводит к повышению финансовой нагрузки на бюджет Пенсионного фонда РФ. Увеличение пенсионного возраста с 2019 года оправдано как отвечающее новым демографическим реалиям. Однако данной меры не достаточно для покрытия дефицита средств. В то же время, инвестиционная доходность пенсионных накоплений в течение последних лет не позволяет обеспечить рост пенсионного обеспечения выше инфляции вопреки Указу Президента РФ от 7 мая 2018 г. "О национальных целях и стратегических задачах развития Российской Федерации на период до 2024 года". Необходимо

также отметить, что в отличие от страховой и банковской сферы в пенсионной сфере отсутствуют единая система стандартов управления рисками, аналогичная существующим Basel и Solvency. Таким образом, тема портфельного управления в накопительных пенсионных планах – актуальна.

Одним из самых популярных показателей для измерения суммарного риска портфеля финансовых активов является Value-at-Risk (VaR). VaR – оценка величины потерь, измеренная в базовой валюте, которую с заданной вероятностью не превысят потери инвестиционного портфеля за заданный промежуток времени. Целью данного исследования является применение модели GARCH-EVT-COPULA для разработки моделей оптимальных инвестиционных стратегий в накопительных пенсионных планах на долгосрочном периоде.

1 Данные и методология

1.1 Данные

В соответствии со статьей 26 Федерального закона № 111-ФЗ от 24.07.2002 г. "Об инвестировании средств для финансирования накопительной пенсии в Российской Федерации" в качестве статистической базы в работе взяты ежедневные котировки бенчмарков для каждого вида финансовых активов в период с 01 января 2006 г. по 01 января 2019 г. (MICEX RGBI TR, MICEX MBI TR, MICEX CBI TR, MICEX 10 INDEX, RURRPC, Ставка по депозитам ЦБ РФ «overnight», USD/RUB).

Дневные значения цен трансформируются в дневные доходности (кроме депозитов), и рассчитываются по формуле [1]:

$$(1) \quad r_t = \log(1 + R_t).$$

$$(2) \quad R_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$$

(рис. 1).

Дневные доходности ставки по депозитам ЦБ РФ «overnight» рассчитаны по формуле сложной процентной ставки с учетом капитализации процентов:

$$(3) \quad r_{day} = \sqrt[260]{1 + r_{year}} - 1,$$

где r_{day} – ставка дневной доходности, r_{year} – ставка годовой доходности, 260 – среднее число рабочих дней в году.

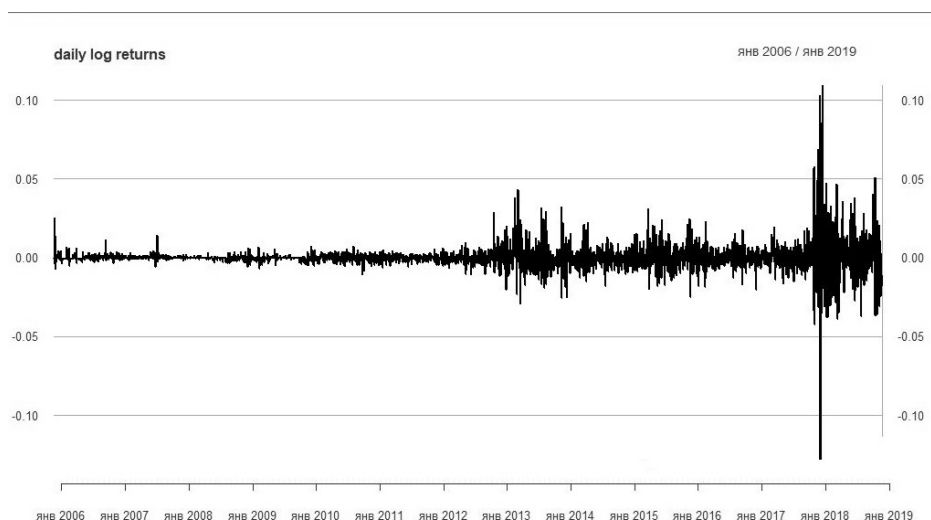


Рис. 1. Пример расчета дневных доходностей для актива USD/RUB

1.2 Моделирование предельных распределений доходностей

Для моделирования временных рядов доходностей активов используем модели GARCH. В основе GARCH лежит регрессионный подход. Условное среднее моделируется процессом авторегрессии со скользящим средним ARMA(p, q):

$$(4) \quad r_{s,t} = c_{s,0} + \sum_{i=1}^p \phi_{s,i} r_{s,t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_{s,j} r_{s,t-j} + e_{s,t}.$$

где s – тикеры (MICEX RGBI TR, MICEX MBI TR, MICEX CBI TR, MICEX 10 INDEX, RURRPRC, Ставка по депозитам ЦБ РФ «overnight», USD/RUB), $c_{s,0}$ – константа, $\phi_{s,i}$ – авторегрессионные коэффициенты, $\theta_{s,j}$ – коэффициенты скользящего среднего, $e_{s,t}$ – белый шум.

Случайную ошибку $e_{s,t}$ можно разложить на две мультипликативные компоненты: величину $z_{s,t}$, обладающую единичной дисперсией, и саму дисперсию $\sqrt{h_{s,t}}$:

$$(5) \quad e_{s,t} = \sqrt{h_{s,t}} z_{s,t}.$$

Условная дисперсия моделируется $GARCH(p, q)$ процессом:

$$(6) \quad h_{s,t} = \omega_s + \sum_{i=1}^p \alpha_{s,i} e_{s,t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_{s,j} h_{s,t-j}.$$

где использованы α_s – $ARCH$ коэффициенты, β_s – $GARCH$ коэффициенты.

Идентификация порядка моделей $ARMA(p, q)$ ограничивается условиями: $p, q \leq 5$. Оптимальный порядок для модели $GARCH(p, q)$ ограничивается условиями: $p, q \leq 2$. Выбор наилучшей модели сочетает в себе тест на наличие единичного корня (ADF), минимизацию критерия Акаике (AIC) и метод максимального правдоподобия (MLE) [2].

Важным аспектом является выбор частного распределения $z_{s,t}$. Поскольку распределение временных рядов финансовых активов характеризуются толстыми хвостами, то для моделирования стандартизированной компоненты используется метод экстремальных значений (Extreme Value Theory – EVT).

Существует два фундаментальных подхода теории экстремальных значений – метод блочных максимум (Block Maximum, BM) и метод превышения порогового значения (Peak Over Threshold, POT). Первый метод обладает существенным недостатком: из всего массива данных активов исследователь игнорирует имеющиеся наблюдения кроме максимум блоков [3].

Метод превышения порогового значения состоит в аппроксимации функции распределения значений случайной величины, максимы которой сходятся, к обобщенному распределению Парето (Generalized Pareto Distribution, GPD). Для случайной величины распределение превышений определенного порога выражается по формуле:

$$(7) \quad F_{i,u_i}(x) = P(x_{i,t} - u_i \leq x | x_{i,t} > u_i) = \frac{F_i(x+u_i) - F_i(u_i)}{1 - F_i(u_i)}.$$

Тогда, предположив, что эта функция принадлежит семейству GPD, мы можем определить вероятность превышения порогового значения.

Обозначим:

$$(8) \quad \bar{F}_i(x) = 1 - F_i(x).$$

Тогда искомые вероятности запишутся следующим образом:

$$(9) \quad \bar{F}_i(x | x_{i,t} > u_i) = P(x_{i,t} > u_i) \cdot P(x_{i,t} > x | x_{i,t} > u_i) = P(x_{i,t} > u_i) \cdot P(x_{i,t} - u_i > x - u_i | x_{i,t} > u_i) = \bar{F}_i(u_i) \cdot \bar{F}_{i,u_i}(x - u_i) = \bar{F}_i(u_i) \cdot \left(1 + \frac{\xi(x-u_i)}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}},$$

где u, β и ξ – параметры расположения, масштаба и формы обобщенного распределения Парето. Используем оценку неизвестной величины $\bar{F}_i(u_i)$:

$$(10) \quad \hat{\bar{F}}_i(x) = \frac{T_{i,u_i}}{T} \left(1 + \frac{\xi(x-u_i)}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, \quad x \geq u_i,$$

где T_{i,u_i} – количество снижений величины остатков i -го вида актива, превышающих значение u_i .

На основании формул (8) и (9) остатки в верхних и нижних хвостах для активов пенсионных накоплений (GPD) [4] вычисляются по формуле:

$$(11) \quad F(z_{s,t}) = \begin{cases} \frac{N_{m_L}}{N} \left(\left(1 + \frac{\xi_L(m_L - z_{s,t})}{\beta_L}\right)^{-\frac{1}{\xi_L}} \right), & z_{s,t} < m_L, \\ \varphi(z_{s,t}), & m_L < z_{s,t} < m_R, \\ 1 - \frac{N_{m_R}}{N} \left(\left(1 + \frac{\xi_R(m_R - z_{s,t})}{\beta_R}\right)^{-\frac{1}{\xi_R}} \right), & z_{s,t} > m_R. \end{cases}$$

Здесь ξ – параметр формы, β – параметр масштаба, m_L (m_R) – параметр расположения. Оптимальное значение порога равняется 10 процентилям.

1.3 Моделирование совместного распределения с помощью копула-функций

Формально, копула – это строго возрастающая функция нескольких переменных с областью определения $[0; 1]^n$ и областью значений $[0; 1]$. $C: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ – это преобразование, переводящее точку n -мерного пространства в точку на отрезке $[0; 1]$ числовой прямой.

Копулы используются для построения общего многомерного распределения $F_x(x)$ на основе знания маргинальных распределений $F_{x_i}(x_i)$. Данный результат основан на следующей теореме Шкляра [4]: пусть $F_{\xi_1}(x_1), \dots, F_{\xi_d}(x_d)$ – непрерывные функции распределения некоторых случайных величин ξ_1, \dots, ξ_d , $H_{\xi_1 \dots \xi_d}(x)$ – их совместная функция распределения, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_d)$, копула $C(u_1, \dots, u_d)$ такая, что

$$(12) \quad C\left(F_{\xi_1}(x_1), \dots, F_{\xi_d}(x_d)\right) = H_{\xi_1 \dots \xi_d}(x_1, \dots, x_d).$$

С другой стороны, при заданных частных распределениях $F_{\xi_i}(x_i)$, $i \in \{1; \dots; d\}$, и копуле $C(u_1, \dots, u_d)$ функция $H_{\xi_1 \dots \xi_d}(x_1, \dots, x_d)$, полученная путем частных распределений в копулу, будет являться совместной функцией распределения величин ξ_1, \dots, ξ_d .

Теорема Шкляра позволяет разбить процедуру оценки параметров многомерного распределения на несколько шагов:

1. Выбор семейств частных функций распределения $F_{\xi_i}(x_i)$;
2. Оценка параметров частных функций;
3. Выбор семейства копулы $C\left(F_{\xi_1}(x_1), \dots, F_{\xi_d}(x_d)\right)$;
4. Оценка параметров копула-функции.

Такое разделение позволяет обобщить традиционный подход к моделированию совместной функции распределения за счет возможности использования различных, наиболее подходящих, частных функций распределения. Во-вторых, копула, являясь нечувствительной к монотонным преобразованиям, позволяет моделировать нелинейную связь между компонентами активов [5]. Нелинейная связь характерна для доходностей финансовых активов, как показано у Жуковой Г.С., Кагировой Д.Р. [6 – 8]. Авторы указывают на недостатки линейного коэффициента корреляции для оценки взаимосвязи случайных величин, заведомо не имеющих нормальное распределение.

Эллиптические копулы строятся на основе многомерных функций распределения. К классу эллиптических относятся копулы Гаусса (нормальная), Стьюдента. Для анализа финансовых данных наиболее часто используются именно они [9].

Копула Стьюдента записывается следующим образом:

$$(13) \quad C_T(u_1, \dots, u_d) = t_{p,v}(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_d)).$$

где $t_{p,v}(\cdot)$ – d -мерное распределение Стьюдента с v степенями свободы и корреляционной матрицей P ; $t_v(\cdot)$ – одномерное распределение Стьюдента.

Параметрами копулы Стьюдента являются коэффициенты корреляционной матрицы и количество степеней свободы.

1.4 Оптимальный портфель пенсионных накоплений

Суммируя выше сказанное, можно предложить следующий алгоритм моделирования доходности портфелей пенсионного фонда:

1. На текущий момент рассчитываются предельные распределения активов;
2. Вычисляется текущая матрица ранговой корреляции фондовых индексов;
3. С помощью копулы строится совместное распределение и производится 10 000 симуляций Монте-Карло (симуляции позволяют получить сценарии доходностей);
4. Методом Монте-Карло находятся ожидаемая доходность каждого актива и оценка его риска по значению коэффициента VaR.

2 Результаты

2.1 Моделирование инвестиционных портфелей пенсионного фонда без учета ограничений на активы

Рабочий стаж индивида до выхода на пенсию составляет в среднем 40 лет, в каждом году предполагается в среднем 260 рабочих дней. Таким образом, мы получаем 7 800 шагов моделирования активов [10].

В соответствии с Федеральным законом № 111 от 24.07.2002 г. "Об инвестировании средств для финансирования накопительной части трудовой пенсии в Российской Федерации" Государственная управляющая компания, функции которой в настоящее время выполняет "Внешэкономбанк" (ВЭБ), вкладывает пенсионные накопления граждан в два инвестиционных портфеля: консервативный инвестиционный портфель (портфель государственных ценных бумаг); расширенный инвестиционный портфель.

В состав консервативного портфеля «Внешэкономбанка» входят:

- Государственные ценные бумаги РФ, которые составляют 47.30% портфеля;
- Облигации российских эмитентов, гарантированных РФ, – 52.70% портфеля.

В состав расширенного портфеля «Внешэкономбанка» входят активы:

- Государственные ценные бумаги РФ, составляющие 39.80% этого портфеля;
- Облигации российских эмитентов – 41.75%;
- Банковские депозиты в рублях – 13.90%;
- Ипотечные ценные бумаги – 3.15%;
- Облигации международных финансовых организаций – 1.40%.

В результате моделирования получена эмпирическая функция распределения среднегодовой доходности каждого портфеля пенсионных накоплений на временном горизонте 40 лет (рис. 2). По оси ординат измеряется среднегодовая доходность портфелей в процентах, по оси абсцисс – стандартное отклонение среднегодовой доходности. Серыми точками отмечены расширенный (Р) и консервативный (К) портфели «Внешэкономбанка».

Оба портфеля «Внешэкономбанка» лежат значительно ниже эффективной границы портфелей (по теории Марковица). Соответственно, они не являются оптимальными, так как существуют другие портфели, обеспечивающие большую доходность при том же уровне риска.

Доходность консервативного портфеля составила 3.27% при уровне риска 1.23%, что ниже текущего уровня инфляции (годовая инфляция к середине декабря 2018 года составила 3.9%).

Расширенный инвестиционный портфель «Внешэкономбанка» показал лучшие результаты: его среднегодовая доходность составила 5.11% при таком же уровне риска 1.23%.

Таким образом, при выборе между портфелями Государственной управляющей компании целесообразно отдать предпочтение расширенному инвестиционному портфелю.

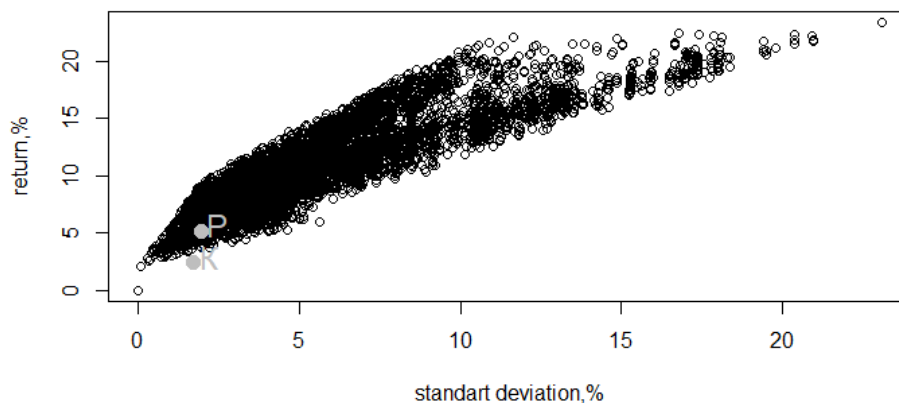


Рис. 2. Портфельное множество без ограничений

2.2 Моделирование инвестиционных портфелей пенсионного фонда с ограничениями на активы

В соответствии с законодательством РФ максимальные доли активов в портфеле пенсионных накоплений, сформированных за счет средств, переданных Пенсионным фондом РФ в доверительное управление управляющей компании, составляют:

- Государственные ценные бумаги РФ – до 100%;
- Государственные ценные бумаги субъектов РФ – до 40%;
- Облигации российских эмитентов (кроме ОФЗ и муниципальных) – до 80%;
- Акции российских эмитентов (ОАО) – до 65%;
- Ипотечные ценные бумаги – до 40%;
- Депозиты в валюте РФ – до 80%;
- Иностранная валюта.

Ниже на рис. 3 серым цветом обозначены портфели с законодательными ограничениями на активы, черным – портфели без ограничений.

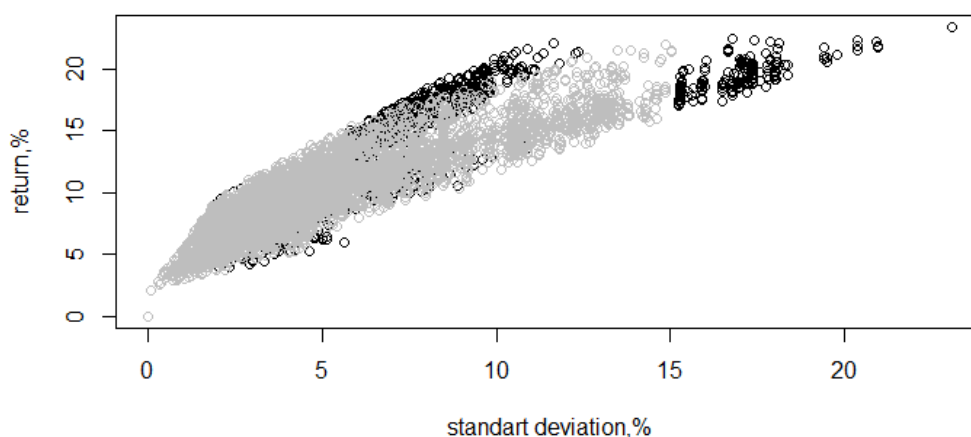


Рис. 3. Портфельное множество с законодательными ограничениями

Представленные результаты показывают, что законодательные ограничения на максимальные доли активов в портфеле позволяют отказаться от высоко рискованных портфелей, находящихся (на рис. 3) в правом хвосте распределения. Однако они обрезают часть эффективной границы портфельного множества (портфели, лежащие выше серого облака). Таким образом, следуя законодательным ограничениям на активы, управляющая компания вынуждена отказаться от портфелей, которые потенциально могут принести большую доходность при том же уровне риска.

2.2 Моделирование инвестиционных портфелей пенсионного фонда с ограничений на активы величину VaR

Далее, законодательные ограничения на активы заменим активами с ограничениями на величину VaR портфеля (рис. 4). Ограничения на величину однодневного VaR инвестиционного портфеля пенсионного фонда установлены на уровне 2.5%.

Выбор периода расчета, уровня значимости и максимальной величины VaR были сделаны по аналогии с уже функционирующей и успешно проявившей себя Мексиканской системой риск-менеджмента в накопительной пенсионной системе [11].

На рис. 4 показано, что ограничения на величину VaR портфеля отрезают только правый хвост распределения портфелей, т.е. только наиболее рискованные портфели.

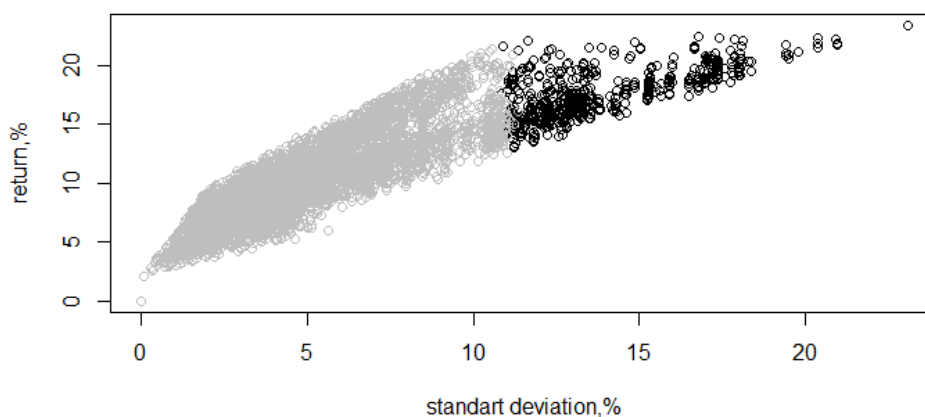


Рис. 4. Портфельное множество с ограничениями на величину VaR в 2.5%

Таким образом, ограничения на VaR портфеля позволяют управляющей компании формировать более доходные портфели, чем при законодательных ограничениях на активы, сохраняя тот же уровень риска.

Рассмотрим менее консервативные ограничения на уровень риска портфеля – VaR с максимальным значением 1%.

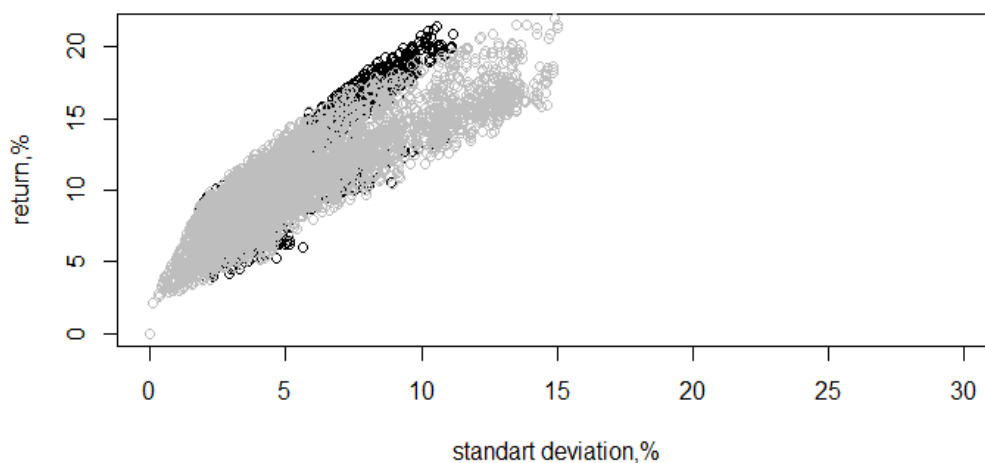


Рис. 5. Портфельное множество с ограничениями на величину VaR с максимальным значением 1%

На рис. 5 можно увидеть, что замена на VaR в 1% портфеля (черный цвет) позволяет расширить вверх множество доступных портфелей пенсионных накоплений в сравнении с VaR в 2.5%. Ограничения на VaR в 2.5% обрезают меньшую часть правого хвоста распределения инвестиционных портфелей, чем ограничения на VaR в 1%.

Таким образом, можно сделать вывод, что ограничения на VaR в 1% являются оптимальными.

Заключение

Использование модели GARCH-EVT-COPULA позволило смоделировать стохастическую среднегодовую доходность портфеля пенсионных накоплений на временном горизонте 40 лет, с оценкой уровня риска. На основании проведенного исследования были сделаны следующие выводы:

1. Портфели «Внешэкономбанка» не являются эффективными, находятся значительно ниже эффективной границы портфелей по Марковицу;
2. Замена законодательных лимитов на максимальную долю активов в составе портфеля пенсионных накоплений ограничениями на VaR однодневной доходности портфеля позволяют расширить вверх множество допустимых портфелей и приблизиться к эффективной границе портфелей;
3. VaR портфеля в размере 1% является оптимальной мерой управления рисками в накопительных пенсионных планах.

Литература

1. Ghorbel A., Trabelsi A. Energy portfolio risk management using time-varying extreme value copula methods // *Economic Modelling*. Vol. 38. 2014. P.470–485.
2. Кагурова Д.Р. Прогнозирование динамики котировок валютных пар на базе R: ARIMA и нейросетевая модель. Научно-методический электронный журнал Концепт. 2017. Т. 39. С. 3581-3585.
3. Huang J.-J., Lee K.-J., Liang H., Lin W.-F. Estimating value at risk of portfolio by conditional copula-GARCH method // *Insurance: Mathematics & Economics*. Vol.45. 2009, № 3. P.315–324.
4. Wang Z.-R., Chen X.-H., Jin Y.-B., Zhou Y.-J. Estimating risk of foreign exchange portfolio: using VaR and CVaR based on GARCH-EVT-Copula model // *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*. Vol. 389. 2010, № 21. P.4918–4928.
5. Low R. K. Y., Alcock J., Faff R., Brailsford T. Canonical vine copulas in the context of modern portfolio management: are they worth it? // *Journal of Banking and Finance*. Vol. 37. 2013, № 8. P. 3085–3099.
6. Жукова Г.С., Кагурова Д.Р. Структурные сдвиги в мировой экономике: нетрадиционный корреляционный анализ. В сборнике: Современные тенденции развития науки и образования: Теория и практика Материалы I Международной научно-практической конференции. 2017. С. 93-98.
7. Кагурова Д.Р., Орлик Л.К. Адаптивный подход к оценке усредненных корреляционных свойств двух временных рядов. В сборнике: Экономическое прогнозирование: модели и

- методы. Материалы XII Международной научно-практической конференции. 2016. С. 20–25.
8. Жукова Г.С., Кагирова Д.Р. Адаптивный подход к анализу корреляционных свойств финансовых временных рядов. В книге: Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2018) Материалы одиннадцатой международной конференции. В 2-х томах. Под общей редакцией С.Н. Васильева, А.Д. Цвиркуна. 2018. С. 412-414.
 9. Aloui R., Aïssa M. S., Nguyen D. K. Conditional dependence structure between oil prices and exchange rates: a copula-GARCH approach // *Journal of International Money and Finance*. Vol. 32. 2013, № 1. P.719–738.
 10. Абрамов А., Радыгин А., Чернова М. Долгосрочные портфельные инвестиции: новый взгляд на доходность и риски. Вопросы экономики. 2015. № 10. С. 54–77.
 11. Абрамов А., Радыгин А., Чернова М., Акшенцева К. Эффективность управления пенсионными накоплениями: теоретические подходы и эмпирический анализ. Вопросы экономики. 2015. № 7. С. 26–44.