

РАСЧЕТ ОЦЕНОК ПЕРВИЧНЫХ И КОСВЕННЫХ СВЯЗЕЙ ПО НАБЛЮДАЕМЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМ В СЛОЖНОЙ СИСТЕМЕ

Гусев В.Б.
ИПУ РАН
gusvbr@ipu.ru

Аннотация: Разработан метод расчета оценок первичных связей по оценкам наблюдений в многофакторной системе взаимодействий. Экспертные данные формализованы с помощью схемы взаимодействий, использующей линейные операции. Для расчета матрицы полных влияний на основе наблюдаемых данных применен метод наименьших квадратов. Расчет весов первичных связей

производится с помощью обратного преобразования первичных связей к полным. Приведен пример расчета коэффициентов полного взаимного влияния факторов и оценок косвенного влияния, что позволило получить качественную оценку системного воздействия для примера экспертной модели автономного развития экономической системы.

Ключевые слова. Оценки первичных связей, коэффициенты полного взаимного влияния факторов, косвенные влияния, экспертная модель.

Введение

Наблюдаемое поведение сложной динамической системы является первичным источником информации для построения ее математической модели, формирования системы управления, принятия управленческих решений. Причины проявления наблюдаемых системных (прямых и косвенных) эффектов определяются непосредственными (примитивными) влияниями одних факторов на другие. Схема взаимодействий факторов для наблюдаемой системы может быть представлена с помощью матрицы оценок влияния. Процедура принятия решений включает получение оценок взаимного влияния факторов и сопоставление полученного результата прогноза с оценкой целевого состояния. Выработка решения основана на использовании в качестве управляющих величин примитивных воздействий на целевое состояние в требуемом направлении.

После того, как определены существенные элементы, или факторы системы, необходимо установить фундаментальные взаимосвязи между ними, определяющие поведение системы в целом. Классический метод анализа, обычно используемый при исследовании сложных объектов, заключается в отдельном изучении поведения их элементов и последующем объединении полученных закономерностей в систему. Системный подход, используемый в таких методах, как нейронные сети, когнитивное моделирование [1, 2], рассматривает сложный объект как единое целое, а связи между его элементами уточняются в процессе исследования. Простая идентификация взаимных зависимостей между факторами является начальным этапом построения модели взаимодействий. Важной проблемой, решаемой при этом подходе, является выявление фундаментальных зависимостей, исходя из совокупности данных, полученных в результате серии измерений наблюдаемых параметров системы.

Начальный экспертный этап анализа взаимовлияния факторов в многофакторной системе заключается в исследовании парных взаимодействий [3, 4]. Из всех пар на множестве рассматриваемых факторов выделяются пары, для которых можно представить механизм прямого взаимодействия типа «причина – следствие». Это так называемые «примитивные» взаимодействия. Косвенные влияния на этом этапе отсеиваются. Топология связей определяется на основании представлений эксперта об исследуемых процессах. Структура примитивных связей и значения коэффициентов связи уточняются в процессе верификации модели.

1 Получение оценок наблюдаемых взаимодействий

Оценки наблюдаемого влияния факторов могут определяться на основании доступных наблюдаемых данных в случае их достаточного объема и качества. Далее на основании этих оценок с участием эксперта формируется схема примитивных влияний, что позволяет проводить сценарный анализ и формировать управляющие воздействия.

Рассмотрим метод идентификации оценок коэффициентов взаимодействий по наблюдаемым данным в предположении линейности связи приращений состояния системы и отклика системы. Пусть наблюдаемым источником данных является серия $j = 1, \dots, k$ наборов состояния факторов \mathbf{X}^j . Рассматриваемым факторам могут быть приписаны численные значения показателей состояния X_i . Наблюдаемое поведение системы за период, достаточный для завершения переходных процессов в линейном приближении может описываться соотношением

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{B} \Delta \mathbf{x},$$

где $\Delta \mathbf{x}$ – начальный вектор приращений состояния системы, $\Delta \mathbf{y}$ – результирующий отклик системы, \mathbf{B} – матрица линейного отклика. Для компоненты l вектора отклика имеем

$$\Delta y^j_l = \sum_{i=1}^n b_{li} \Delta x^j_i.$$

Строку b_l матрицы \mathbf{B} можно оценить, решая уравнение

$$(1) \quad \Delta \mathbf{Y}_l = \Delta \mathbf{X} \mathbf{b}_l.$$

Здесь $\Delta \mathbf{Y}_l$ – вектор, состоящий из компонент вектора $\Delta \mathbf{y}^j$ наблюдаемого набора размерности k . $\Delta \mathbf{X}$ – матрица, состоящая из k строк векторов $\Delta \mathbf{x}^j$.

При $k = n$ и при обратимости матрицы $\Delta \mathbf{X}$ уравнение (1) имеет единственное решение

$$\mathbf{b}_l = \Delta \mathbf{X}^{-1} \Delta \mathbf{Y}_l,$$

откуда

$$\mathbf{B} = \Delta \mathbf{X}^{-1} \Delta \mathbf{Y}.$$

При $k < n$ может быть бесконечно много решений. Если $k > n$, система (1) может быть переопределена. Если $k \neq n$, будем решать задачу минимума невязки методом наименьших квадратов

$$\min_{b_{li}} \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^n (\Delta y^j_l - \sum_{i=1}^n b_{li} \Delta x^j_i)^2.$$

Для получения решения, приравнявая нулю производные невязки по b_{lj} , получим уравнения для определения этих коэффициентов:

$$\sum_{j=1}^k (\Delta y^j_l - \sum_{i=1}^n b_{li} \Delta x^j_i) \Delta x^j_m = 0, \quad m = 1 \dots n, l = 1 \dots n.$$

В векторном виде эта система уравнений может быть представлена следующим образом. Рассматриваемое уравнение (1) следует умножить слева на транспонированную матрицу $\Delta \mathbf{x}^T$, после чего придем к квадратной матрице $\Delta \mathbf{X}^T \Delta \mathbf{X}$ в правой части

$$\Delta \mathbf{X}^T \Delta \mathbf{Y}_l = \Delta \mathbf{X}^T \Delta \mathbf{X} \mathbf{b}_l, \quad l = 1 \dots n,$$

откуда при обратимости матрицы $\Delta \mathbf{X}^T \Delta \mathbf{X}$ метод наименьших квадратов позволяет получить приближение для матрицы \mathbf{b}

$$\mathbf{B} = (\Delta \mathbf{X}^T \Delta \mathbf{X})^{-1} \Delta \mathbf{X}^T \Delta \mathbf{Y}.$$

Полученные оценки наблюдаемых влияний могут служить основой для формирования схемы примитивных взаимодействий в предположении локальной линейности связей между рассматриваемыми факторами.

2 Метод расчета оценок первичных связей

Схема примитивных взаимодействий факторов представляется экспертной матрицей \mathbf{A} . Коэффициенты a_{ij} этой матрицы означают оценку первичного прироста фактора i , вызванного единичным приращением фактора j . Прирост фактора определяется непосредственным действием действующих механизмов. Оценка взаимодействия представляется в относительных единицах или в балльной шкале, в зависимости от применяемой процедуры рефлексии. Значения коэффициентов a_{ij} матрицы \mathbf{A} , назначаемые экспертным способом, находятся в интервале $[-a_{max}, a_{max}]$. Знаки коэффициентов определяются характером влияния – положительным или отрицательным.

Рассмотрим процедуру оценивания результатов примитивного взаимного влияния факторов. Зависимости между показателями состояния факторов могут быть представлены линейными функциями. Для расчета оценки системного эффекта рассматривается результат приращений Δx_i показателей, характеризующих состояние рассматриваемого набора факторов \mathbf{X} . Вектор $\Delta \mathbf{y}$ – первичная реакция на приращение $\Delta \mathbf{x}$ вектора показателей представляется с помощью экспертно заданной матрицы \mathbf{A} в виде

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x}.$$

Реакция на приращение $\Delta \mathbf{y}$ даст вторичную реакцию на приращение $\Delta \mathbf{x}$. Если процесс многократного рефлексивного отображения приращения $\Delta \mathbf{x}$ на себя приводит к устойчивому

результату Δs , будем его называть системной реакцией на первичное приращение Δx вектора показателей. Величина Δs в случае сходимости процесса рефлексий может быть рассчитана исходя из следующих соображений.

Системная реакция $\Delta s(\Delta x)$ обладает устойчивостью по отношению к возмущениям (первичным приращениям Δx), когда первичная реакция на приращение Δx не вызывает изменения этой системной реакции. То есть, при любом Δx справедливо равенство

$$\Delta s = \mathbf{A}(\Delta s + \Delta x),$$

определяющее системную реакцию Δs в ответ на приращение Δx вектора показателей. Отсюда

$$\Delta s = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A} \Delta x = \mathbf{B} \Delta x,$$

где \mathbf{B} представляет собой матрицу полных оценок влияний.

Таким образом, в рамках операций линейной алгебры, если матрица $\mathbf{E} - \mathbf{A}$ обратима, матрица полных оценок \mathbf{B} вычисляется по формуле

$$\mathbf{B} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{E} - (\mathbf{E} - \mathbf{A})) = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} - \mathbf{E},$$

или при условии сходимости степенного ряда для матрицы \mathbf{A} по формуле

$$(2) \quad \mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \dots$$

Таким образом, матрица полных оценок \mathbf{B} представляет собой транзитивное замыкание оценок примитивных влияний.

Если ряд (2) расходится, это означает, отсутствие системной реакции. При этом точное вычисление \mathbf{B} даже при положительной матрице \mathbf{A} может дать отрицательные значения коэффициентов \mathbf{B} , что также свидетельствует об отсутствии системной реакции. Для того, чтобы обеспечить сходимость ряда, достаточно элементы соответствующих матриц умножить на определенный коэффициент α (например, величину, обратную к оценке нормы $\|\mathbf{A}\|$ матрицы \mathbf{A}), а после вычисления суммы ряда умножить ее на этот коэффициент. Тогда получим приближенное значение матрицы \mathbf{B}

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{A} + \alpha \mathbf{A}^2 + \alpha^2 \mathbf{A}^3 + \dots$$

Очевидно, чем ближе коэффициент α к 1, тем точнее приближение $\tilde{\mathbf{B}}$. Таким образом, если шкала оценивания такова, что параметр ее границ a_{\max} достаточно мал, ряд (1) гарантированно сходится к точному значению \mathbf{B} , что является признаком наличия системной реакции.

Рассмотрим обратную задачу восстановления оценок примитивных взаимодействий по оценкам полных взаимодействий. Обратная процедура поиска оценок примитивных взаимодействий, если матрица $\mathbf{E} + \mathbf{B}$ обратима, имеет вид

$$\mathbf{A} = \mathbf{E} - (\mathbf{E} + \mathbf{B})^{-1},$$

а при условии сходимости степенного ряда для матрицы $(-\mathbf{B})$ имеем:

$$(3) \quad \mathbf{A} = \mathbf{B} - (-\mathbf{B})^2 - (-\mathbf{B})^3 \dots$$

Этот процесс можно интерпретировать как последовательное вычитание из матрицы полных влияний \mathbf{B} всех косвенных влияний. Сумма косвенных влияний, равная

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = (-\mathbf{B})^2 + (-\mathbf{B})^3 \dots$$

или

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \dots,$$

позволяет судить о косвенном системном эффекте (связности) взаимного влияния факторов.

Для линейных операций матричной алгебры ряды (2) и (3) сходятся, если наименьшие собственные числа матриц в правой части меньше 1 по абсолютной величине (коэффициенты матриц по модулю достаточно малы).

3 Пример расчета

В качестве примера рассмотрим схему автономного развития экономической системы [5]. Веса влияний приведены в 10-балльной системе.

Схема примитивных влияний для модели автономного развития экономической системы имеет вид.

Импорт = 8(Оборотные средства) + 4(Разделение труда)
 Оборотные средства = (-5)(Экономические риски) + 9(Экспорт)
 Основные средства = 2(Оборотные средства) + (-3)(Техногенные риски)
 Локализация управления = 5(Оборотные средства) + 6(Основные средства) + 4(Глобализация управления) + (-3)(Разделение труда)
 НТП = 3(Оборотные средства) + 5(Локализация управления)
 Техногенные риски = 3(Основные средства) + (-3)(Локализация управления) + (-5)(НТП)
 Экономические риски = (-5)(Локализация управления) + (-5)(НТП) + 8(Техногенные риски) + (-5)(Эффект масштабирования)
 Внешние интересы = 6(Импорт) + (-4)(Локализация управления) + 4(НТП) + 5(Экспорт) + 7(Эффект масштабирования)
 Экспорт = 4(Внешние интересы) + 3(Разделение труда)
 Глобализация управления = (-6)(Локализация управления) + 8(Внешние интересы)
 Эффект масштабирования = (-5)(Локализация управления) + 5(Глобализация управления)
 Разделение труда = (-3)(Локализация управления) + 7(Глобализация управления)

Этой схеме соответствует матрица **A**. Элементы матрицы **A**, могут быть получены на основе анализа матрицы полных оценок **B** наблюдаемых взаимовлияний. Эти элементы можно интерпретировать как показатели первичного (примитивного) взаимовлияния соответствующих факторов. Эти влияния носят фундаментальный характер, что позволяет строить более точные количественные модели.

Таблица 1. Матрица **A** первичного (примитивного) взаимовлияния соответствующих факторов

	Импорт	Оборотные средства	Основные средства	Локализация управления	НТП	Техногенные риски	Экономические риски	Внешние интересы	Экспорт	Глобализация управления	Эффект масштабирования	Разделение труда
Импорт		8										4
Оборотные средства							-5		9			
Основные средства		2				-3						
Локализация управления		5	6							4		-3
НТП		3		5								
Техногенные риски			3	-3	5							
Экономические риски				-5	5	8					-5	
Внешние интересы	6			-4	4				5		7	
Экспорт								4				3
Глобализация управления				-6				8				
Эффект масштабирования				-5						5		
Разделение труда				-3						7		

Матрица полных влияний **B**, учитывающая все косвенные воздействия, соответствует оценкам наблюдаемых взаимодействий факторов, что открывает возможность выявлять наиболее

влиятельные, критические факторы в сложной системе наблюдаемых взаимодействий. Она не может быть получена с помощью процесса (1), поскольку последний расходится. Множитель

$$\alpha = 1/\|\mathbf{A}\|, \text{ где } \|\mathbf{A}\| = \sum_i (\sum_j a^{2ij})^{1/2},$$

позволяет получить приближенное значение матрицы \mathbf{B} , которое будем интерпретировать как матрицу $\tilde{\mathbf{B}}$ наблюдаемых оценок влияния.

Таблица 2. Матрица $\tilde{\mathbf{B}}$ полных (наблюдаемых) оценок влияния.

	Импорт	Оборотные средства	Основные средства	Локализация управления	НТП	Техногенные риски	Экономические риски	Внешние интересы	Экспорт	Глобализация управления	Эффект масштабирования	Разделение труда
Импорт	0,2	8,1	-0,2	-0,4	0,9	-0,9	-1,1	0,7	2,2	1,6	0,8	4,3
Оборотные средства	0,4	0,8	-0,3	2,5	3,7	-4,0	-5,1	1,6	9,5	1,1	3,0	1,0
Основные средства	0,0	2,1	-0,4	0,7	0,9	-3,2	-0,3	0,1	0,5	0,1	0,2	0,0
Локализация управления	0,3	5,9	5,8	0,3	0,9	-1,6	-0,8	1,0	1,7	3,2	0,7	-2,8
НТП	0,1	3,5	0,4	5,2	0,4	-0,5	-0,5	0,2	0,9	0,3	0,3	-0,1
Техногенные риски	0,0	-0,6	2,6	-3,8	-5,0	-0,4	0,1	-0,1	-0,2	-0,2	-0,1	0,2
Экономические риски	-0,1	-1,2	0,5	-6,1	-7,0	8,0	0,2	-0,4	-0,4	-1,4	-5,2	0,2
Внешние интересы	6,4	4,2	-0,6	-5,6	4,6	-0,4	-0,6	1,5	6,3	2,3	7,7	3,1
Экспорт	1,1	0,7	-0,2	-1,6	0,8	0,0	-0,1	4,5	1,1	1,4	1,4	3,6
Глобализация управления	2,1	0,8	-0,8	-7,9	1,4	0,0	-0,1	8,4	1,9	0,4	2,5	1,3
Эффект масштабирования	0,3	-0,4	-0,6	-6,3	0,1	0,1	0,0	1,2	0,2	4,8	0,3	0,4
Разделение труда	0,4	-0,1	-0,4	-4,7	0,3	0,1	0,0	1,8	0,3	6,9	0,5	0,4

Применение процесса (2) к этой матрице также дает расходящийся ряд. Однако использование поправочного множителя

$$\alpha = 1/\|\mathbf{B}\|, \text{ где } \|\mathbf{B}\| = \sum_i (\sum_j b^{2ij})^{1/2},$$

позволяет с точностью до целых значений восстановить матрицу \mathbf{A} .

Таблица 3. Матрица $\tilde{\mathbf{B}} - \mathbf{A}$ оценок косвенного влияния факторов, полученная с округлением до целых значений.

	Импорт	Оборотные средства	Основные средства	Локализация управления	НТП	Техногенные риски	Экономические риски	Внешние интересы	Экспорт	Глобализация управления	Эффект масштабирования	Разделение труда
Импорт	0	0	0	0	1	-1	-1	1	2	2	1	0
Оборотные средства	0	1	0	3	4	-4	0	2	1	1	3	1
Основные средства	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0

	Импорт	Оборотные средства	Основные средства	Локализация управления	НТП	Техногенные риски	Экономические риски	Внешние интересы	Экспорт	Глобализация управления	Эффект масштабирования	Разделение труда
Локализация управления	0	1	0	0	1	-2	-1	1	2	-1	1	0
НТП	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
Техногенные риски	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
Экономические риски	0	-1	1	-1	-2	0	0	0	0	-1	0	0
Внешние интересы	0	4	-1	-2	1	0	-1	1	1	2	1	3
Экспорт	1	1	0	-2	1	0	0	0	1	1	1	1
Глобализация управления	2	1	-1	-2	1	0	0	0	2	0	2	1
Эффект масштабирования	0	0	-1	-1	0	0	0	1	0	0	0	0
Разделение труда	0	0	0	-2	0	0	0	2	0	0	1	0

Эта матрица характеризует эффект системной связности рассматриваемых факторов. Эффект роста показывают положительные диагональные коэффициенты для факторов *Основные средства*, *Внешние интересы*, *Экспорт*.

Схема косвенных влияний, соответствующая матрице $\tilde{B} - A$ оценок косвенного влияния факторов.

Импорт = 1(НТП) + (-1)(Техногенные риски) + (-1)(Экономические риски) + 1(Внешние интересы) + 2(Экспорт) + 2(Глобализация управления) + 1(Эффект масштабирования)

Оборотные средства = 1(Оборотные средства) + 3(Локализация управления) + 4(НТП) + (-4)(Техногенные риски) + 2(Внешние интересы) + 1(Экспорт) + 1(Глобализация управления) + 3(Эффект масштабирования) + 1(Разделение труда)

Основные средства = 1(Локализация управления) + 1(НТП) + 1(Экспорт)

Локализация управления = 1(Оборотные средства) + 1(НТП) + (-2)(Техногенные риски) + (-1)(Экономические риски) + 1(Внешние интересы) + 2(Экспорт) + (-1)(Глобализация управления) + 1(Эффект масштабирования)

НТП = 1(Оборотные средства) + 1(Экспорт)

Техногенные риски = (-1)(Оборотные средства) + (-1)(Локализация управления)

Экономические риски = (-1)(Оборотные средства) + 1(Основные средства) + (-1)(Локализация управления) + (-2)(НТП) + (-1)(Глобализация управления)

Внешние интересы = 4(Оборотные средства) + (-1)(Основные средства) + (-2)(Локализация управления) + 1(НТП) + (-1)(Экономические риски) + 1(Внешние интересы) + 1(Экспорт) + 2(Глобализация управления) + 1(Эффект масштабирования) + 3(Разделение труда)

Экспорт = 1(Импорт) + 1(Оборотные средства) + (-2)(Локализация управления) + 1(НТП) + 1(Экспорт) + 1(Глобализация управления) + 1(Эффект масштабирования) + 1(Разделение труда)

Глобализация управления = 2(Импорт) + 1(Оборотные средства) + (-1)(Основные средства) + (-2)(Локализация управления) + 1(НТП) + 2(Экспорт) + 2(Эффект масштабирования) + 1(Разделение труда)

Эффект масштабирования = (-1)(Основные средства) + (-1)(Локализация управления) + 1(Внешние интересы)

Разделение труда = (-2)(Локализация управления) + 2(Внешние интересы) + 1(Эффект масштабирования)

Использование этой схемы позволяет определять цепочки влияний при верификации схемы первичных взаимодействий и при выборе управляющих воздействий.

Относительно большие значения коэффициентов влияния этой схемы показывают эффект мультипликации действующих факторов: *Экспорт, Глобализация управления* для фактора *Импорт; Локализация управления, НТП, Эффект масштабирования* для фактора *Оборотные средства; Экспорт* для фактора *Локализация управления; НТП* для фактора *Экономические риски; Оборотные средства, Локализация управления, Разделение труда* для фактора *Внешние интересы; Импорт, Экспорт, Эффект масштабирования* для фактора *Глобализация управления; Внешние интересы* для фактора *Разделение труда*.

Заключение

Элементы матрицы \mathbf{A} , полученной на основе двухэтапного анализа наблюдаемых взаимовлияний, можно интерпретировать как показатели первичного (примитивного) взаимовлияния соответствующих факторов. Это открывает возможность выявлять наиболее влиятельные, критические факторы в сложной системе наблюдаемых взаимодействий. Часть этих факторов может быть назначена в качестве управляющих. Схема косвенных влияний, соответствующая матрице $\tilde{\mathbf{B}} - \mathbf{A}$, позволяет определять факторы, обладающие мультиплицирующим эффектом, а также факторы, обладающие свойством самоподдерживаемого роста.

При расчете матрицы \mathbf{A} параметр α должен подбираться таким образом, чтобы выявлять наиболее значимые критические факторы, а их количество было по возможности минимальным. Определение структуры матрицы \mathbf{A} , зависящей от параметра α , может также проводиться с применением мнения эксперта [6].

Литература

1. Асанов А.З., Мышкина И.Ю. Исследование возможности применения нейронных сетей при решении задачи отбора команды для реализации проекта // Проблемы управления. – 2017. – № 1. – С. 19–30.
2. Кулинич А. А. Компьютерные системы моделирования когнитивных карт: подходы и методы // Проблемы управления, 2010, №3, с. 2-16.
3. Гусев В.Б. Принятие решений в сильносвязанных структурах взаимодействия факторов и следствий // Конгресс по интеллектуальным системам и технологиям «AIS-IT'10»: труды конгресса. Научное издание в 4-х томах. – М.: Физматлит, 2010. – Т. 1. – С. 124-130.
4. Саати Томас Л. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети. Пер. с англ. / Томас Л. Саати; науч. ред. А.В. Андрейчиков, О.Н. Андрейчикова. Изд. 2-е. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 360 с.
5. Гусев В.Б., Исаева Н.А. Метод рефлексивного оценивания взаимодействия факторов денежно-кредитной политики // Фундаментальные исследования. – 2013. – №10 часть 9. – С. 2005-2009.
6. Гусев В.Б., Гусева Н.Е. Рефлексивный анализ решений при управлении нематериальными активами предприятия. / Труды 9-ой Международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD'2016, Москва). М.: ИПУ РАН, 2016. Т. 2. С. 280-284.