АЛГОРИТМЫ ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ РЕСУРСОЕМКОСТИ НА РАЗВИТИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Лукацкий А.М., Федорова Г.В.
Институт энергетических исследований РАН
macrolab@eriras.ru

Аннотация. Рассматривается задача варьирования удельных прямых затрат на продукцию экономическими субъектами. Предложен алгоритм, основанный на методе обратной матрицы. Алгоритм построен таким образом, что для расчета эффектов от многочисленных вариаций требуется одно обращение матрицы. Подход позволяет исследовать два типа нелокальных вариаций: удельных прямых затраты на данный продукт по всем экономическим субъектам; их же по всем продуктам для заданного экономического субъекта.

Ключевые слова: экономические субъекты, макроэкономика, материальный баланс, удельные материальные затраты, энергосбережение, имитационное моделирование, линейные неравенства, обратная матрица, вариация коэффициентов матрицы.

Введение

Предлагается метод отображения реакций экономических субъектов (ЭС) экономики РФ на следующие вариации экзогенных факторов:

- изменение удельных материальных затрат заданного продукта (например, электроэнергии или топливно-энергетического ресурса (ТЭР));
- изменение структуры удельных материальных затрат заданного экономического субъекта, например, электроэнергетики.

В известных макроэкономических моделях для решения подобных задач применяются модели, основанные на методах полилинейного программирования, когда поведение отраслей экономики подчинено некоторому единому критерию (например, максимизации ВВП в сопоставимых ценах). Известен альтернативный подход [1], реализованный в разработанной в ИНЭИ РАН модели MEMMAS (Macroeconomic Model of Multi-Agent Simulation), в которой поведение ЭС рассматривается как поведение взаимосвязанных агентов. При таком подходе агенты, в качестве которых выступают отрасли экономики, описываются негладкими и даже разрывными функциями.

В [2] была предложена модель PriceImpact, в качестве согласующей схемы в которой выступает материальный баланс продуктов (МБ).

Традиционным инструментом поиска согласованного решения здесь является симплекс-алгоритм [3]. Он дает итерационный поиск согласованного решения. Количество итераций в самом худшем случае может расти экспоненциально [4] в зависимости от размерности задачи. Алгоритм поиска согласованных решений в системах линейных неравенств для целочисленных задач рассмотрен в [5]. В [2] был предложен согласующий алгоритм, основанный на методе обратной матрицы. Одно из преимуществ метода [2] состоит в возможности развития алгоритма для расчета эффектов от варьирования коэффициентов матрицы. Подход для оценки эффектов от вариации коэффициентов матрицы был предложен в [6] на примере задачи ЛП, В [6] рассматривались вариации специального вида (строчная, столбцовая), однако там допускались только локальные вариации, т.е. ограниченные определенным условием на варьируемые коэффициенты. Локальные вариации коэффициентов матрицы рассматривались также в [7], причем там выводилась только приближенная формула для расчета эффекта от вариаций. Для задач, возникающих в контексте метода наименьших квадратов, алгоритм, использующий псевдо-обратную матрицу (например, левую обратную для неквадратной матрицы), был применен в [8], [9].

В настоящей работе этот подход будет распространен на модели различного типа, в которых применяется процедура обращения матрицы. В качестве исходно варьируемой может выступать не обязательно обращаемая матрица А сама, но также матрицы, которые участвуют в процедуре сборки матрицы А для обращения, например, матрица Р удельных материальных затрат ЭС на выпуск единицы собственной продукции (как в формуле (2) из [2]). Новизна математических методов настоящей работы в сравнении с [6], состоит в том, что снимается ограничение о локальном характере вариаций коэффициентов матрицы, принятое в [6]. Возможность рассматривать нелокальные вариации существенно расширяет круг потенциально решаемых задач, дает возможность точного, а не приближенного расчета последствий от варьирования матричных коэффициентов. Удается также сформулировать условие, разграничивающее существование и не существование обратной матрицы после вариации коэффициентов исходной.

Типы вариаций, рассматриваемые в настоящей работе, как и в [6] , – строчная и столбцовая, но в отличие от [6] , – нелокальные. Эти типы вариаций имеют естественный содержательный смысл:

- строчная соответствует задаче варьирования удельных затрат на выделенный продукт для зданного набора ЭС;
- столбцовая соответствует задаче варьирования структуры удельных затрат заданного набора продуктов для выделенного ЭС.

1 Метод расчета вариации коэффициентов матрицы

Пусть задана матрица A размерности n×n. Предположим, что коэффициенты $a(i,j)$ матрицы A принадлежат некоторому полю K. В отличие от [6], [7] для поля коэффициентов матрицы A не требуется наличие какой-либо нормировки. Например, K может быть полем вещественных чисел, комплексных чисел, полем вычетов по модулю p, где p – простой элемент некоторого евклидова кольца [10], [11].

Предположим, что матрица A обратима, и вычислена ее обратная матрица A^{-1}. Пусть теперь варьируются коэффициенты какого-либо одного столбца (j) или одной строки (i) матрицы A .

Обозначим через $\delta a(*, j)$ вектор вариации коэффициентов столбца ($\delta a(i,*)$ строки). Наша цель получить прямую формулу для пересчета обратной матрицы после таких вариаций, т.е. вычислить матрицы:

$$(1)\quad \left(A+\delta a(i,*)\right)^{-1} ;$$

$$(2)\quad \left(A+\delta a(*, j)\right)^{-1} .$$

Сформулируем теперь общее алгебраическое утверждение.

Предположим, что для A существует обратная матрица A^{-1} и обозначим ее коэффициенты через $a^{(-1)}(i, j)$. . Для вариаций типа (1), (2) введем элемент:

$$(3)\quad q=\sum_{i,j} a^{(-1)}(j, i))\, \delta a(i, j).$$

Предложение 1.

Если элемент $q \neq -1$, то обратные матрицы, фигурирующие в (1) и (2), существуют и имеют вид:

$$(4)\quad \left(A+\delta a(i,*)\right)^{-1}=A^{-1}-\frac{A^{-1}\, \delta a(i,*)\, A^{-1}}{1+q} ;$$

$$(5)\quad \left(A+\delta a(*, j)\right)^{-1}=A^{-1}-\frac{A^{-1}\, \delta a(*, j)\, A^{-1}}{1+q} .$$

Если $q=-1$, то обратные матрицы (1), (2) не существуют.

2 Алгоритм оценки эффекта от варьирования матрицы удельных материальных затрат

Расчет эффектов производится на многопродуктовой модели экономики, в которой одна отрасль может выпускать несколько продуктов и один продукт может производиться несколькими отраслями. Модель включает 29 ЭС (отраслей экономики РФ, государственные учреждения (ГУ) и домашние хозяйства (ДХ)), которые выпускают и потребляют 34 продукта. Модель предназначена для варьирования экзогенных параметров, на изменения которых реагируют ЭС. Исходным для проводимых исследований служит базовый вариант, который является согласованным с точки зрения выполнимости материальных и финансовых балансов. Базовый вариант был получен с использованием ранее разработанной в ИНЭИ РАН модели экономики с выделенным энергетическим блоком [1]. В процессе эксплуатации пользователь устанавливает значения для интересующего его набора варьируемых экзогенных параметров, после чего в автоматическом режиме рассчитывается отклик на вариацию параметров. Далее исследования проводятся в виде отклонений от базового варианта.

Состав варьируемых параметров формируется пользователем. Предполагаются два возможных набора:

1. Удельные затраты всех ЭС на заданный продукт. Например, таким продуктом может являться электроэнергия или газ, тогда вариация может отражать процесс энергосбережения. В качестве варьируемого продукта может выступать также металл (черный или цветной), тогда такая вариация может отражать процесс ресурсосбережения.
2. Удельные затраты заданного ЭС (например, отрасли “Электроэнергетика”). Такая вариация может отражать процесс взаимозамены ТЭРов, потребляемых ЭС, например, взаимозамена газ-уголь или мазут-уголь. Также может моделироваться снижение затрат на собственные нужды (потери) для таких ЭС, у которых они велики, например, для отрасли “Сельское хозяйство”.

Для расчета эффекта от вариаций типа 1 и 2 предложен четырехуровневый алгоритм отклика.

Для базового варианта данных предварительно генерируется обратная матрица

Затем производится:

1. Структуризация множества ЭС с точки зрения весомости их, как потребителей варьируемой продукции:

- Для типа вариации 1 фиксируется варьируемый продукт (группа I). Выделяются ЭС, которые являются наиболее емкими потребителями продукта группы I, а выпускаемые этими ЭС продукты называть группой II.
- Для типа вариации 2 фиксируются все продукты, выпускаемые заданной отраслью (группа продуктов I). Затем выделяются ЭС, которые являются наиболее емкими потребителями продуктов группы I. Выпускаемые этими ЭС продукты образуют группу II.

2. И в том, и в другом случае меняются цены на продукты группы II, чтобы компенсировать изменения затрат выпускающих их отраслей в ответ на изменение затрат на потребление продукта группы I. Затем меняются цены оставшихся продуктов (группа продуктов III) для компенсации затрат выпускающих их отраслей на изменение цен продуктов групп I и II.
3. Производится изменение объемов выпусков продуктов. Здесь также используется двухуровневая схема:
   - Меняются финансовые ресурсы ЭС. В качестве компенсации меняются их инвестиционные затраты. Как следствие, меняется потребление ЭС инвестиционных продуктов (строительство, машиностроение, металл, коммерческие услуги).
   - Из-за изменения удельных затрат, а также выпуска инвестиционных продуктов, меняются суммарные материальные затраты отраслей.
4. В качестве следствия изменений (1-3) возникают дисбалансы в МБ. Чтобы погасить их, пересчитываются выпуски продуктов по следующему алгоритму.

Алгоритм расчета отклика модели на производимую вариацию экзогенных параметров разбивается на 5 шагов.

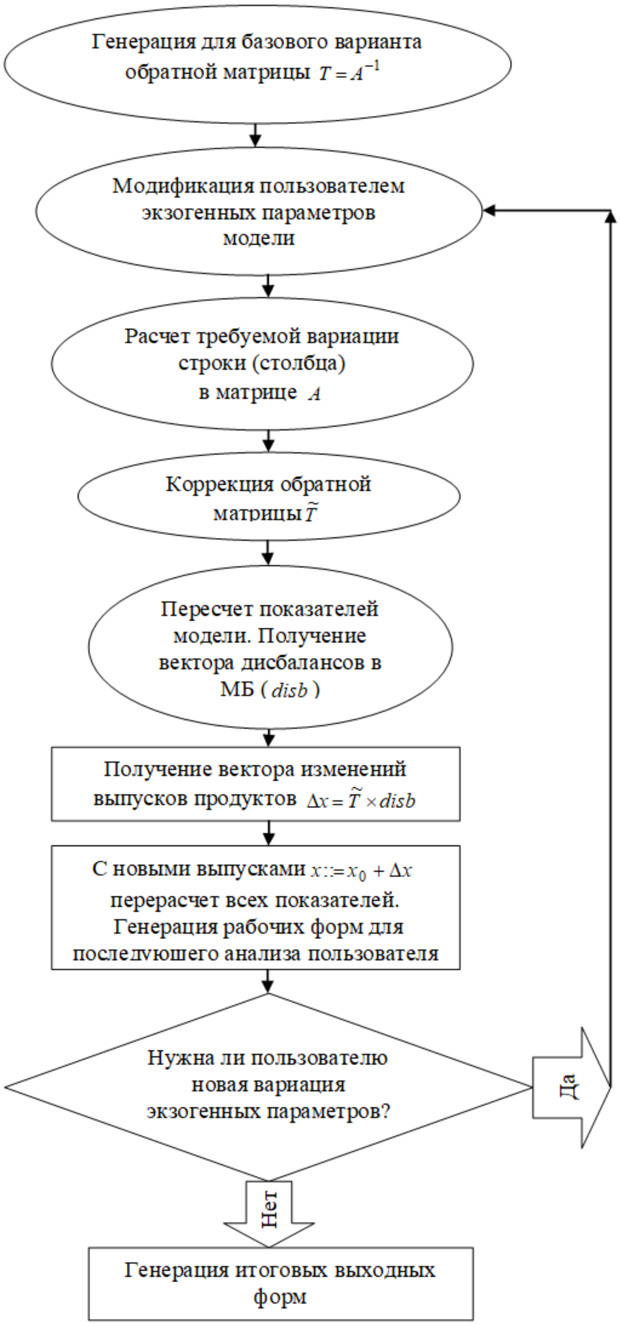

Рис. 1. Блок-схема алгоритма отклика на вариацию экзогенных параметров модели.

Шаг 1. Как следствие модификации пользователем экзогенных параметров модели вычисляется вариация столбца (строки) в матрице A для обращения.

Шаг 2. Пересчитываются коэффициенты используемой в модели обратной матрицы. Этот пересчет производится без запуска процедуры обращения матрицы, используя формулы (4), (5), по которым формируется обновленная обратная матрица $\widetilde{T}$.

Шаг 3. Запускается пересчет оставшихся показателей, после чего система выдает вектор $disb$ дисбалансов МБ.

Шаг 4. Вектор $disb$ умножается на обратную матрицу $\tilde{T}$ и получается вектор изменений выпусков продуктов, требуемых для последующего сведения МБ: $\Delta x = \widetilde{T} \times disb$.

Шаг 5. Производится пересчет вектора выпусков продуктов: $x ::= x_0 + \Delta x$. Здесь x_0 является вектором выпусков продуктов относительно базового варианта. Запускается пересчет всех показателей модели.

По итогам выполнения шагов 1-5 дисбалансы в МБ оказываются снятыми. Затем система производит пересчет показателей и генерирует выходные формы. Пример такой выходной формы приведен в таблице 1, п. 3. Блок-схема алгоритма расчета отклика дана на рис.1.

3 Результаты численных экспериментов

Внедрение проводились на модели, которая является развитием PriceImpact. Для численных экспериментов использовалась база данных, аналогичная [2], [12]. Производилось снижение удельных материальных затрат электроэнергии на 10% по сравнению с базовым вариантом для заданных ЭС. Были выбраны 12 наиболее электроемких ЭС (отраслей):

Добыча сырой нефти;
Добыча полезных ископаемых кроме ТЭР;
Целлюлозно-бумажное производство, издательская и полиграфическая деятельность;
Химическое производство;
Производство прочих неметаллов, минеральных продуктов;
Черная металлургия;
Цветная металлургия;
Производство готовых металлических изделий;
Производство машин, оборудования;
Производство и распределение э/э, газа, воды;
Железнодорожный транспорт;
Прочий транспорт.

Результаты получены для 2016 г. и прогнозного 2019 г. Они приведены в таблице 1.

Таблица 1. Эффекты от снижения электропотребления. Относительные изменения показателей к базовому варианту.

Наименование показателя	2016 г.	2019 г.
Валовый внутренний продукт	0,32%	0,36%
Валовое накопление основного капитала	2,04%	2,27%
Инвестиции отраслей	2,57%	2,96%
Доходы Государственных Учреждений	0,21%	0,27%
Налоговые поступления Государственных учреждений	0,32%	0,39%
Суммарный налог на прибыль	1,34%	1,42%
Косвенные налоги	0,20%	0,25%
Налог на добавленную стоимость	0,57%	0,67%

4 Особенности программной реализации

Описанный подход программно реализован в среде Visual Studio 2008 под операционной системой WINDOWS’8 с процессором Intel Pentium (i7). В качестве языка программирования был использован Visual Basic 2008. В качестве системы для ввода, редактирования и хранения данных модели, – Microsoft Excel 2010.

Модель включает 8715 параметров, которые могут рассматриваться как исходная информация для ввода донных. Она содержит также 52980 ограничений, на основе которых генерируются выходные формы различного вида.

Приложение 1. Доказательство предложения 1.

Рассмотрим сначала случай $q \neq -1$.

Обозначим через Id единичную матрицу. Возьмем вариацию (1). Введем

$$X = \left(A + \delta a(i,*)\right)\left(A^{-1} - A^{-1}\,\delta a(i,*)A^{-1}\right)\frac{1}{1+q} =$$
$$= \mathrm{Id} + \delta a(i,*)A^{-1} - \delta a(i,*)A^{-1}\frac{1}{1+q} -$$
$$- \delta a(i,*)A^{-1}\delta a(i,*)A^{-1}\frac{1}{1+q}.$$

Обозначим

$$t(i,*) = \delta a(i,*)A^{-1}, \quad t(i,k) = \sum_s \delta a(i,s)a^{-1}(s,k).$$

Имеем $t(i,i) = q$, $t(i,*)t(i,*) = q\,t(i,*)$.

В итоге получаем

$$X = \mathrm{Id} + t(i,*) - t(i,*)\frac{1}{1+q} - t(i,*)\frac{q}{1+q} = \mathrm{Id}.$$

Для вариации типа (2) введем

$$X = \left(A^{-1} - A^{-1}\,\delta a(*,j)\right)\left(A + \delta a(*,j)\right)\frac{1}{1+q} =$$
$$= \mathrm{Id} + A^{-1}\,\delta a(*,j) - A^{-1}\delta a(*,j)\frac{1}{1+q} -$$
$$- A^{-1}\delta a(*,j)A^{-1}\delta a(*,j)\frac{1}{1+q}.$$

Обозначим

$$t(*,j) = A^{-1}\delta a(*,j), \; t(k,j) = \sum_s a^{-1}(k,s)\delta a(s,j).$$

Имеем $t(j,j) = q, t(*,j)t(*,j) = q\,t(*,j)$.

В итоге получаем

$$X = \mathrm{Id} + t(*,j) - t(*,j)\frac{1}{1+q} - t(*,j)\frac{q}{1+q} = \mathrm{Id}.$$

Рассмотрим теперь случай $q = -1$

Для вариации типа 1 преобразуем матрицу

$$\left(A + \delta a(i,*)\right)^{-1} = A^{-1}\left(\mathrm{Id} + \delta a(i,*)A^{-1}\right)^{-1}.$$

Матрица $\mathrm{Id} + \delta a(i,*)A^{-1}$ имеет ненулевые элементы только на главной диагонали и в строке i. Элемент на их пересечении равен $1 + q = 0$. Рассмотрим столбец i, его элемент на пересечении с диагональю равен 0. Так как остальные элементы в столбце i нулевые, то этот столбец нулевой, откуда следует, что матрица

$$\mathrm{Id} + \delta a(i,*)A^{-1}$$

не имеет обратной, следовательно, матрица $A + \delta a(i,*)$ также не имеет обратной.

Для вариации типа 2 преобразуем матрицу

$$\left(A + \delta a(*,\mathrm{j})\right)^{-1} = \left(\mathrm{Id} + A^{-1}\delta a(*,j)\right)^{-1}A^{-1}.$$

Матрица $\mathrm{Id}+A^{-1}\delta a(*,j)$ имеет ненулевые элементы только на главной диагонали и в столбце j Элемент на их пересечении равен $1+q=0$. Далее рассмотрим строку j, ее элемент на пересечении с диагональю равен 0.

Так как остальные элементы в строке j нулевые, то эта строка нулевая, откуда следует, что матрица

$$\mathrm{Id}+A^{-1}\delta a(*,j)$$

не имеет обратной, следовательно, матрица $A+\delta a(*,j)$ также не имеет обратной.

Литература

1. *Malakhov V., Nesytykh K, Dubynina T.*. A Multi-Agent Approach for the Intercectoral Modeling of the Russian Economy. 2017 Tenth International Conference Management of Large-Scale System Development (MLSD), IEEE Conference Publications, October 2017, DOI:10.1109/MLSD.2017.8109656.
2. *Lukatskii A.M., Fedorova G.V.* Algorithms and software for studying the impact of fuel and energy prices on the economy of the Russian federation, Management of Large-Scale System Development (MLSD), 2017 Tenth International Conference, 2-4 Oct. 2017, Moscow, Russia // IEEE Xplore, DOI: 10.1109/MLSD.2017.8109653.
3. *Bosco J., Etoa E.*, New optimal pivot rule for the simplex algorithm //Advances in Pure Mathematics, Vol. 6. 2016. – P. 647-658.
4. *Clee V., Minty D.J.* How good is the simplex algorithm? // Inequalities III (Proceedings of the Third Symposium on Inequalities held at the University of California, Los Angeles, Calif., September 1-9, 1969, dedicated to the memory of Theodore S. Motzkin) . – New York-London: Academic Press, 1972. – P. 159-175.
5. *Shinto K.G. and Sushama G.M.*, “An Algorithm for Solving Integer Linear Programming Problems,” International Journal of Research in Engineering and Technology, Vol. 02, Issue 07, Jul-2013, pp. 107-112.
6. *Лукацкий А.М., Шапот Д.В.* Оценка чувствительности оптимального решения задачи линейного программирования к вариациям коэффициентов матрицы //Кибернетика и системный анализ // 1992, №4. – С. 176-178.
7. *Werhagen M. and Van Dooren J.,* “Numerical aspects of different Kalman filter implementations,” IEEE Trans. Autom. Contr. , Vol. AC-31, No. 10, 1986, pp. 907-917.
8. *Winkler J.*, “The sensitivity of linear algebraic equations,” in: J.G. Lewis (Ed), Proceedings of the Fifth SIAM Conference on Applied Linear Algebra, SIAM, Philadelphia, 1994, pp. 279-283.
9. *Ji J., Wei Y.*, “A note of the sensitivity of the solution of the weighted linear least squares problem, ” Applied Mathematics and Computation, Vol.145, 2003, p.p. 481-485.
10. *Kostrikin A.I.*, Introduction to algebra, translated by N. Koblitz. Universitext, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York. 1982. — 575 pp.
11. *Lang S.* , Algebra. Revised Third Edition (Part One. Basic Object of Algebra, Chapter II. Rings). Springer-Verlag New York Inc., 2002. — 914 pp.
12. http://www.economy.gov.ru/minec/activity/sections/macro/prognoz