

РЕКУРРЕНТНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА АВТОМАТНЫХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ

Епифанов А.С.

Институт проблем точной механики и управления РАН

EpifanovAS@list.ru

Аннотация: В работе рассматриваются математические модели дискретных систем, представленные в форме автоматных моделей. В качестве способа задания автоматных моделей используется аппарат геометрических образов автоматных отображений, предложенный и разработанный В.А.Твердохлебовым и позволяющий задавать законы функционирования автоматов геометрическими кривыми и числовыми последовательностями.

Ключевые слова: дискретная детерминированная динамическая система, математическая модель, геометрический образ автоматного отображения, интерполяция, рекуррентная форма, спектр динамических параметров.

Введение

В математической форме дискретных детерминированных динамических систем абстрактными средствами задаются идеализированные связи входных сигналов (воздействий) и состояний систем (обобщённых характеристик), во-первых, с выходными сигналами (внешняя, наблюдаемая реакция, воздействие на внешнюю среду), а во-вторых, с новыми состояниями системы (внутренняя реакция). На основе этого определяются функция выходов и функция переходов дискретного автомата. Процессы функционирования образованы связью воздействий и реакций, размещённой на целочисленной, неотрицательной оси "времени".

Используемые традиционные математические модели дискретных детерминированных динамических систем задаются символьными структурами: таблицами, графами, матрицами, логическими уравнениями. Данные модели не пригодны для использования при анализе и синтезе больших и сложных систем, ввиду огромной размерности. Твердохлебовым В.А. в работах [1-3] предложен и разработан новый подход для задания законов функционирования дискретных детерминированных динамических систем, основанный на совмещении символьных математических структур и числовых структур. Данный подход позволяет использовать мощные идеализации классической непрерывной математики: бесконечно малой величины, актуальной бесконечности, суммирования бесконечных рядов, предельного перехода и т.п.

Предложенный подход позволяет задавать законы функционирования геометрическими фигурами, которые в свою очередь могут быть заданы аналитически, совместить средства диагностирования различной природы в единую форму – эксперимент с автоматом, использовать классические методы интерполяции и экстраполяции. Разработанный геометрический образ представляет собой фазовую картину объекта диагностирования, в котором сечениями представлены конкретные варианты функционирования объекта – фазовые траектории.

В.М.Глушков в работе [4] отмечает: «При дискретном подходе также имеют дело с переменными векторными полями. Однако, в отличие от предыдущего случая, компоненты векторов, а также пространственные и временные координаты принимают дискретные ряды значений. Наиболее употребительным является случай, когда число значений, принимаемых компонентами векторов и пространственными координатами, конечно (поле задано в конечном числе точек). Что же касается временной координаты, то ее область значений при дискретном подходе отождествляют обычно с множеством целых чисел (положительных, отрицательных и нуля). Нулевой момент времени считается при этом начальным, а остальные моменты времени получают названия в соответствии с их номерами: первый, второй, минус первый, минус второй и т.д. При этом чаще всего ограничиваются рассмотрением конечных временных промежутков, начиная либо с нулевого, либо с первого момента времени.» Это непосредственно согласуется с представлением законов функционирования дискретных детерминированных автоматов с конечными и счетно-бесконечными множествами состояний автоматными диаграммами (диаграммами Мура), в которых точкам пространства соответствуют состояния в векторной форме, связи точек определяются функцией переходов δ , а наблюдаемые признаки функционирования (результат функционирования) представляется функцией выходов λ для автоматов типа Мили и функцией отметок состояний μ для автоматов типа Мура.

Среди различных подходов к оценке сложности процессов, алгоритмов, законов функционирования автоматов и реализаций этих законов для исследования выбран подход, при

котором используется геометрическое представление поведения автоматов. Обоснованием такого выбора является то, что задание законов функционирования автоматов геометрическим образом однозначно определяется последовательностью вторых координат точек геометрического образа, в представлении алгоритмов схемами Янова алгоритмы также определяются линейными структурами, т.е. последовательностями, реализациям алгоритмов для конкретных исходных данных соответствуют последовательность операторов действий и последовательность, состоящая из начальных, промежуточных и заключительных данных. Рекуррентное описание последовательностей дает полную и глубокую характеристику взаиморасположения элементов в последовательности: определяет функциональную зависимость элемента последовательности от непосредственно предшествующей ему подпоследовательности элементов. Числовым показателем при рекуррентном определении последовательности является длина однозначно сопоставляемой элементу предшествующей подпоследовательности. На основе этих свойств определения последовательности рекуррентными формами В.А.Твердохлебовым предложены 5 уровней спектра, состоящего из числовых показателей наименьшего порядка рекуррентной формы; числовых показателей длин начальных отрезков последовательности, которые определяются рекуррентными формами различных порядков; числа смен рекуррентных форм, определяющих последовательность последовательностями рекуррентных форм фиксированного порядка. В остальных уровнях спектра характеризуются длины подпоследовательностей, определяемые рекуррентными формами различных порядков и характеристики рекуррентных определений с учетом весов для наборов аргументов в используемых рекуррентных формах.

1 Спектр динамических параметров рекуррентного определения последовательностей

Большое количество исследований посвящено оценке сложности строения последовательностей. Фундаментальной характеристикой сложности является принадлежность последовательности языкам, входящим в автоматные языки, контекстно-свободные языки, языки непосредственных составляющих и т.п. Соответствующие этим классам языков порождающие грамматики не содержат средства оценки сложности последовательностей значениями числовых параметров.

В работе В.А. Твердохлебова [2] предложен и разработан спектр динамических параметров, характеризующих сложность правил порождения последовательности. Спектр $\Omega = \langle \Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_4 \rangle$ вводится как многоуровневая структура, в которой на каждом уровне представлены наборы характеристик использованных рекуррентных форм $F^m_i(z_1, z_2, \dots, z_m) = z_{m+1}$, где m – порядок рекуррентной формы, $m=1,2,\dots$. Каждая рекуррентная форма F^m_i с учетом отношения $\xi \in U^*$ определяется функцией $f^m_i: U^m \rightarrow U$ и применяется для определения одного или нескольких отрезков в зависимости от структуры последовательности ξ . Полагается, что рекуррентная форма применяется отдельными вариантами вхождения рекуррентной формы в последовательность правил, определяющих рассматриваемую последовательность ξ . Вариант применения рекуррентной формы F^m_i оканчивается в каждом из следующих случаев:

- применение F^m_i не соответствует функции f^m_i ,
- дальнейшее и соответствующее функции f^m_i применение F^m_i связано с f^m_i (первым) повторным применением рекуррентной формы к уже использованным для определяемого отрезка набора аргументов.

Во втором случае применение F^m_i рассматривается как новый вариант использования F^m_i . Это условие требуется для выхода из циклов в последовательности отдельных правил определения ξ , образующих общее правило. Следовательно, при счете правил, использованных при определении последовательности ξ , пересчитываются варианты вхождения отдельных правил в общее правило.

Спектр предназначен для строгого представления свойств последовательности, фундаментальной характеристики последовательности по взаимосвязям (взаиморасположению) элементов в ней. Определим понятие спектра. Исследования свойств спектров, соответствующих последовательностям, имеет общее значение для конструктивных объектов. Под сложностью последовательности элементов из конечного множества понимается сложность процесса ее определения последовательностью правил из выбранного множества правил $P = \{P_i\}_{i \in I}$. Для обеспечения точности и простоты таких правил используются правила в виде рекуррентных форм $F^m_i(z_1, z_2, \dots, z_m) = z_{m+1}$, $m=1,2,\dots$, и логических условий их применения. Полнота средств для оценки сложности процесса определения последовательности ξ достигается, во-первых, использованием наборов рекуррентных форм различных порядков $F^1 = \{F^1_{i_1}\}_{i_1 \in I_1}$, $F^2 = \{F^2_{i_2}\}_{i_2 \in I_2}$, \dots , $F^k = \{F^k_{i_k}\}_{i_k \in I_k}$, а во-

вторых, применением каждой рекуррентной формы F^m_i на наибольшем по длине, определяемом по правилам, отрезке последовательности ξ .

Пусть $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ - конечное множество и ξ последовательность элементов из множества U : $\xi = \langle u(1), u(2), \dots, u(t), \dots \rangle$. Множества всех конечных последовательностей, всех конечных последовательностей длины v и бесконечных последовательностей элементов из множества U будем обозначать соответственно U^* , U^v , U^∞ . Спектр $\Omega(\xi)$ динамических характеристик последовательности $\xi \in U^* \cup U^\infty$ имеет иерархическую структуру, состоящую из уровней $\Omega(\xi) = (\Omega_0(\xi), \Omega_1(\xi), \Omega_2(\xi), \Omega_3(\xi), \Omega_4(\xi))$. Каждый конкретный вариант реализации (представление значениями параметров) любого уровня $\Omega_i(\xi)$ определяет разбиение каждого из множеств U^* , U^v , U^∞ на подмножества по свойствам совпадения характеристик, соответствующих уровню. Подмножества такого разбиения будем рассматривать как классы эквивалентности последовательностей. Введём следующие обозначения.

Пусть $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ - конечное множество и ξ последовательность элементов из множества U : $\xi = \langle u(1), u(2), \dots, u(t), \dots \rangle$. Множества всех конечных последовательностей, всех конечных последовательностей длины v и бесконечных последовательностей элементов из множества U будем обозначать соответственно U^* , U^v , U^∞ . Спектр $\Omega(\xi)$ динамических характеристик последовательности $\xi \in U^* \cup U^\infty$ имеет иерархическую структуру, состоящую из уровней $\Omega(\xi) = (\Omega_1(\xi), \Omega_2(\xi), \Omega_3(\xi), \Omega_4(\xi))$. Каждый конкретный вариант реализации (представление значениями параметров) любого уровня $\Omega_i(\xi)$ определяет разбиение каждого из множеств U^* , U^v , U^∞ на подмножества по свойствам совпадения характеристик, соответствующих уровню. Подмножества такого разбиения будем рассматривать как классы эквивалентности последовательностей.

Определение 1. Для любой последовательности $\bar{\xi} \in U^v$ наименьший порядок рекуррентной формы, определяющей последовательность $\bar{\xi}$, будем обозначать $m_0(\bar{\xi})$.

Определение 2. Для любой последовательности $\bar{\xi} \in U^v$ и $m \in N^+$, где $1 \leq m \leq m_0(\bar{\xi})$, наибольшую длину начального отрезка последовательности $\bar{\xi}$, определяемого рекуррентной формой порядка m , будем обозначать $d^m(\bar{\xi})$.

Определение 3. Для любой последовательности $\bar{\xi} \in U^v$ и $m \in N^+$, где $1 \leq m \leq \lfloor \bar{\xi} \rfloor - 1$, число смен рекуррентных форм порядка m , требующихся при определении последовательности $\bar{\xi}$, будем обозначать $r^m(\bar{\xi})$.

Определение 4. Для любой последовательности $\bar{\xi} \in U^v$ и $m \in N^+$, где $1 \leq m \leq m_0(\bar{\xi})$ и j , где $1 \leq j \leq r^m(\bar{\xi})$ длину j -го отрезка в определении последовательности $\bar{\xi}$ будем обозначать $d_j^m(\bar{\xi})$.

Используя введенные обозначения определим спектр параметров, характеризующих последовательность, как следующую структуру:

$$\Omega_0(\bar{\xi}) = \langle m_0(\bar{\xi}) \rangle;$$

$$\Omega_1(\bar{\xi}) = \langle d^1(\bar{\xi}), d^2(\bar{\xi}), \dots, d^\alpha(\bar{\xi}) \rangle;$$

$$\Omega_2(\bar{\xi}) = \langle r^1(\bar{\xi}), r^2(\bar{\xi}), \dots, r^\alpha(\bar{\xi}) \rangle;$$

$\Omega_3(\bar{\xi}) = \langle \Omega_3^1(\bar{\xi}), \Omega_3^2(\bar{\xi}), \dots, \Omega_3^\alpha(\bar{\xi}) \rangle$, где $\alpha = m_0(\bar{\xi})$ и $\Omega_3^j(\bar{\xi}) = \langle d_1^j(\bar{\xi}), d_2^j(\bar{\xi}), \dots, d_{n_j}^j(\bar{\xi}) \rangle$ (n_j - номер последнего отрезка в определении последовательности $\bar{\xi}$ как последовательности отрезков, определяемых отдельными рекуррентными формами порядка j);

$\Omega_4(\bar{\xi}) = \Theta(\Omega_3(\bar{\xi}))$, где Θ - оператор замены в $\Omega_3(\bar{\xi})$ величин длин отрезков весами использованных рекуррентных форм для определения отрезков.

Четвёртый уровень $\Omega_4(\bar{\xi})$ спектра $\Omega(\bar{\xi})$ добавляет к характеристикам в предшествующих уровнях оценку сложности правил и вариантов использования правил.

Рекуррентная форма F рассматривается как правило, определяющее последовательность ξ , сложность которого может быть выражена с помощью величин m_0 (наименьший порядок

рекуррентной формы) и $n = |W|$, где W - множество значений переменных ξ_i . Простейшая формула, определяющая числовое значение оценки сложности использованной рекуррентной формы, имеет вид

$$\theta = \frac{m_0 \cdot k}{n^{m_0-1}},$$

где k – число знаков в последовательности, порожденных применением рекуррентной формы F . Эта оценка θ в варианте $\Omega_0 = \langle m_0 \rangle$ использована на 0 -ом уровне спектра Ω , что упрощает и огрубляет первую оценку сложности последовательности.

2 Оценка сложности законов функционирования автоматов, заданных последовательностями, на основе использования спектра динамических параметров

Рекуррентная форма $F(z_{t-m}, z_{t-m+1}, \dots, z_{t-1}) = z_t$ порядка m определяет последовательность $\xi = \langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots \rangle$, если для любого $t, m < t$ и $t \in N$, $F(\xi_{t-m}, \xi_{t-m+1}, \dots, \xi_{t-1}) = \xi_t$.

Для оценки сложности взаиморасположения цифр в начальных отрезках последовательностей, представляющих приближения иррациональных чисел π , e , $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (золотое сечение), $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\ln(2)$, $\ln(10)$, $\zeta(3) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^3}$, константа Каталана $c = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$, константа Эйлера (Постоянная Эйлера — Маскерони) $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n))$ и др. рассмотрим последовательности длины до 1000000 знаков, а π и e до 10 млн. знаков. Эти структуры сравнены и классифицированы по сложности на основе показателей первых двух уровней спектра (вышестоящие уровни спектра также вычислены), т.к. числовые структуры, соответствующие третьему и четвертому уровню имеют практически не представимую размерность. Например, в представлении показателей четвертого уровня спектра для последовательности длины 1 млн. знаков, приближенно представляющей число π , содержится более 100000000 знаков.

Определение 5 Сравнимые по входам инициальные автоматы $A_1 = (S_1, X, Y_1, \delta_1, \lambda_1, s_{01})$, где $s_{01} \in S_1$, и $A_2 = (S_2, X, Y_2, \delta_2, \lambda_2, s_{02})$, где $s_{02} \in S_2$, будем называть изоморфными по выходам, если $|Y_1| = |Y_2|$ и существует такое взаимно-однозначное отображение $\varphi: Y_1 \xrightarrow{na} Y_2$, для которого выполняется условие :

$$(\forall p \in X^*) \{ |p| = v \rightarrow \lambda_2(s_{02}, p) = \varphi(\lambda_1(s_{01}, pr_1 p)) \varphi(\lambda_1(\delta_1(s_{01}, pr_1 p), pr_2 p)) \dots \varphi(\lambda_1(\delta_1(s_{01}, pr_{12\dots v-1} p), pr_v p)) \},$$

где $pr_{1\dots d} p$ - префикс длины d последовательности p .

Каждый инициальный автомат $A = (S, X, Y, \delta, \lambda, s_0)$, где $|Y| = l$, и семейство не тождественных взаимно-однозначных отображений вида $\varphi: Y \xrightarrow{na} Y$ определяют множество из $l!$ изоморфных по выходам автоматов, которое будем обозначать $\Psi(A, Y)$.

Это означает, что каждая оценка сложности законов функционирования инициального автомата распространяется на весь класс изоморфных по выходам автоматов.

Введем следующие обозначения: $H = \{ e, \pi, \varphi, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \ln(2), \ln(10), \zeta(3), C, \gamma \}$, H_d – множество начальных отрезков длины d последовательностей, определяющих элементы множества H , $\alpha^m(H_d) = \{ A_d^m(e), A_d^m(\pi), A_d^m(\varphi), A_d^m(\sqrt{2}), A_d^m(\sqrt[3]{2}), A_d^m(\ln(2)), A_d^m(\ln(10)), A_d^m(\zeta(3)), A_d^m(C), A_d^m(\gamma) \}$, где $A_d^m(\beta)$, $\beta \in H_d$, - дискретный детерминированный автомат с числом входных сигналов m и β является последовательностью вторых координат точек геометрического образа автомата.

Для проведения исследований были разработаны алгоритмы и программы, позволившие построить указанные спектры для рассмотренных величин. Результаты построения двух первых уровней спектров динамических параметров для указанных последовательностей приведены в таблицах 1 – 4, а на рис. 1 и рис.2 приведены графики зависимостей длин (ось ординат) начальных отрезков последовательностей, представляющих приближения чисел π и e (рис.1) и $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\sqrt[3]{2}$ (рис.2) от роста порядка m (ось абсцисс) рекуррентных форм, определяющих отрезки.

Синтез и минимизация автоматов по последовательностям из множества H_d проведен при различных значениях числа $m \in U$ входных сигналов автоматов ($U = \{2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 2000\}$). В теоремах 1 - 5 приведены результаты построения показателей спектров для множества $\alpha^m(H_d)$ (при различных значениях d) и разбиения по совпадению показателей на классы эквивалентности по сложности.

Теорема 1. Законы функционирования автоматов из $\alpha^z(H_d)$, где $d=1000000$:

- по сложности, определяемой нулевым уровнем Ω_0 спектра Ω образуют 2 класса эквивалентности по сложности: $\{A_d^z(e), A_d^z(\pi), A_d^z(\varphi), A_d^z(\sqrt[3]{2}), A_d^z(\zeta(3))\}$ и $\{A_d^z(\sqrt{2}), A_d^z(\ln(2)), A_d^z(\ln(10)), A_d^z(C), A_d^z(\gamma)\}$;
- по сложности, определяемой первым уровнем Ω_1 спектра Ω образуют одноэлементные классы эквивалентности по сложности.

Доказательство.

Предварительное замечание.

Исследуемая математическая структура имеет большую размерность (множество из 10 последовательностей по d ($d = 1000000$) элементов в каждой). Анализ свойств последовательностей, который должен быть проведен для доказательства утверждения теоремы, необходимо предполагает рассмотрение каждого элемента каждой последовательности. Требующиеся показатели свойств последовательностей определяются на основе многократных построений и анализа отрезков последовательностей при поиске минимальных по порядку рекуррентных форм, определяющих последовательности и их префиксы. Провести рекуррентные определения последовательностей и всех их префиксов, используя задание последовательностей только формулами, без применения быстродействующих и имеющих большой объем памяти вычислительных систем невозможно, т.к. в формулах конкретные элементы последовательностей представлены неявно.

В связи с этим для доказательства утверждения теоремы требующиеся математические структуры большой, интуитивно не обозримой размерности, во-первых, строились явно, с использованием ЭВМ, а, во-вторых, поиск и подбор рекуррентных форм наименьших порядков также производился с использованием ЭВМ. При доказательстве теоремы формулировки утверждений, выделение вариантов случаев, требующих рассмотрения, построения логических выводов производились по общепринятым для доказательств правилам. (Программная реализация используемых процедур для вычисления на ЭВМ тщательно разработана и проверена на правильность.)

Доказательство теоремы проведем в 3 этапа.

Этап 1. По формулам, определяющим элементы множества H вычисляется множество последовательностей H_d , где $d=1000000$.

Этап 2. В цикле по элементам множества H_d для каждой последовательности $\xi \in H_d$ в цикле по длине префиксов последовательности ξ находится наименьший порядок $m_0^d(\xi)$ рекуррентной формы, определяющей всю последовательность ξ . Для рассматриваемого множества H_d для каждой последовательности определены показатели нулевого уровня спектра: $m_0^d(\pi) = 13$, $m_0^d(e) = 13$, $m_0^d(\varphi) = 13$, $m_0^d(\sqrt[3]{2}) = 13$, $m_0^d(\zeta(3)) = 13$, $m_0^d(\sqrt{2}) = 12$, $m_0^d(\ln(2)) = 12$, $m_0^d(\ln(10)) = 12$, $m_0^d(C) = 12$, $m_0^d(\gamma) = 12$. В соответствии с этими показателями множество автоматов $\alpha^m(H_d)$ разбивается на 2 класса $\{A_d^z(e), A_d^z(\pi), A_d^z(\varphi), A_d^z(\sqrt[3]{2}), A_d^z(\zeta(3))\}$ и $\{A_d^z(\sqrt{2}), A_d^z(\ln(2)), A_d^z(\ln(10)), A_d^z(C), A_d^z(\gamma)\}$ эквивалентных по сложности автоматов.

Этап 3. В цикле по последовательностям из множества последовательностей H_d и для каждой последовательности $\xi \in H_d$ в цикле по длине последовательности для каждого t , где $1 \leq t \leq m_0^d(\xi)$, вычисляется наибольшая длина префикса последовательности ξ , определяемого рекуррентной формой порядка t . В результате вычислен упорядоченный по значениям t набор наибольших длин префиксов последовательности ξ , определяемых рекуррентными формами порядка t , где $1 \leq t \leq m_0^d(\xi)$, что составляет первые уровни спектров для рассматриваемых последовательностей. По полученным значениям показателей первых уровней спектров каждый из классов автоматов, определенный на этапе 2, разбивается на одноэлементные подклассы, что и утверждается в теореме.

В теореме 1 представлены оценки сложности законов функционирования автоматов, для случая их определения последовательностями вторых координат точек их геометрических образов длины $d = 1000000$. Полученные классы сложности не являются инвариантными относительно изменения длины d рассматриваемых последовательностей. В теоремах 2 - 5 показано как изменяется сложность законов функционирования автоматов при определении этих законов геометрическими образами различной длины. Доказательство теорем 1 - 5 аналогичны и для доказательства теорем использовались одни и те же программные средства для получения значений показателей спектра.

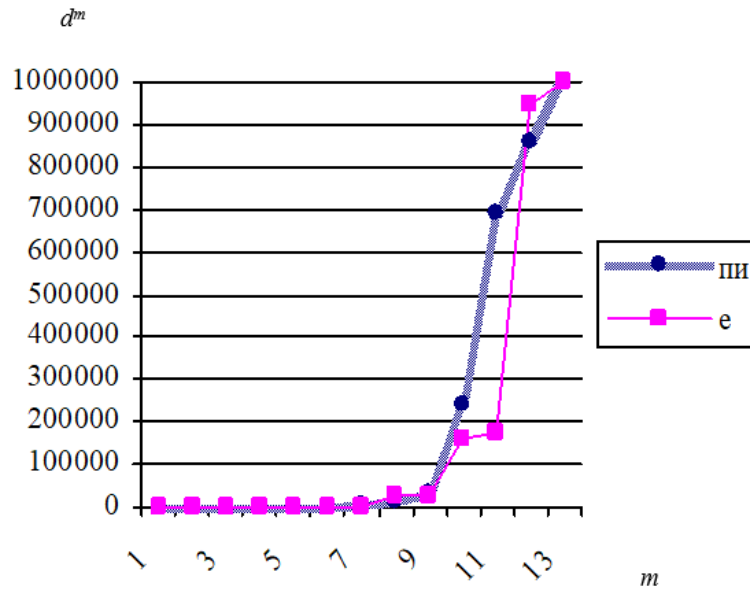


Рис. 1. Графики зависимостей длин (ось ординат) начальных отрезков последовательностей, представляющих приближения чисел π и e от роста порядка m (ось абсцисс) рекуррентных форм, определяющих отрезки.

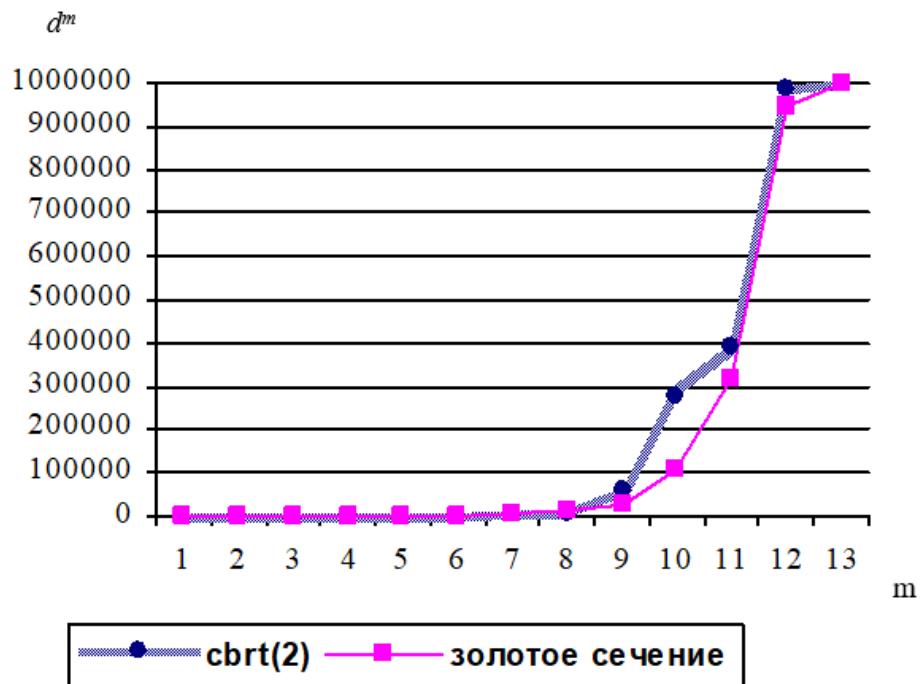


Рис. 2. Графики зависимостей длин (ось ординат) начальных отрезков последовательностей, представляющих приближения чисел $\sqrt[3]{2}$ и $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ от роста порядка m (ось абсцисс) рекуррентных форм, определяющих отрезки.

Теорема 2. Законы функционирования автоматов из $\alpha^m(H_d)$, где $d=1000$, по сложности:

- определяемой нулевым уровнем Ω_0 спектра Ω образуют 2 класса эквивалентности по сложности: $\{A_d^m(e), A_d^m(\sqrt[3]{2}), A_d^m(\zeta(3))\}$ и $\{A_d^m(\pi), A_d^m(\varphi), A_d^m(\sqrt{2}), A_d^m(\ln(2)), A_d^m(\ln(10)), A_d^m(C), A_d^m(\gamma)\}$;
- определяемой первым уровнем Ω_1 спектра Ω образуют одноэлементные классы эквивалентности по сложности.

Теорема 3. Законы функционирования автоматов из $\alpha^m(H_d)$, где $d=10000$, по сложности:

- определяемой нулевым уровнем Ω_0 спектра Ω образуют 3 класса эквивалентности по сложности: $\{A_d^m(e), A_d^m(\pi), A_d^m(\varphi), A_d^m(\sqrt{2}), A_d^m(\zeta(3)), A_d^m(\gamma)\}$, $\{A_d^m(\sqrt[3]{2}), A_d^m(\ln(10))\}$ и $\{A_d^m(\ln(2)), A_d^m(C)\}$;
- определяемой первым уровнем Ω_1 спектра Ω образуют одноэлементные классы эквивалентности по сложности.

Теорема 4. Законы функционирования автоматов из $\alpha^m(H_d)$, где $d = 100000$, по сложности:

- определяемой нулевым уровнем Ω_0 спектра Ω образуют 3 класса эквивалентности по сложности: $\{A_d^m(e), A_d^m(\pi), A_d^m(\varphi), A_d^m(\sqrt[3]{2}), A_d^m(\ln(2)), A_d^m(\ln(10)), A_d^m(C), A_d^m(\gamma)\}$, $\{A_d^m(\sqrt{2})\}$ и $\{A_d^m(\zeta(3))\}$;
- определяемой первым уровнем Ω_1 спектра Ω образуют одноэлементные классы эквивалентности по сложности.

Таблица 1. Характеристики нулевого уровня Ω_0 спектра Ω для последовательностей, задающих

приближения величин π , e , $\sqrt[3]{2}$, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\zeta(3) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^3}$.

Длина	π	e	$\sqrt[3]{2}$	$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\zeta(3) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^3}$
50	3	5	4	3	3
100	4	5	4	5	4
1000	6	7	7	6	7
2000	7	7	7	7	7
5000	8	8	8	8	8
10000	8	8	9	8	8
20000	9	8	9	9	9
50000	10	10	9	10	9
100000	10	10	10	10	12
150000	10	10	10	11	12
200000	10	12	10	11	12
250000	11	12	10	11	12
300000	11	12	11	11	12
350000	11	12	11	12	12
400000	11	12	12	12	12
450000	11	12	12	12	12
500000	11	12	12	12	12
550000	11	12	12	12	12
600000	11	12	12	12	12
650000	11	12	12	12	12
700000	12	12	12	12	12
750000	12	12	12	12	12

Длина	π	e	$\sqrt[3]{2}$	$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\zeta(3) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^3}$
800000	12	12	12	12	12
850000	12	12	12	12	13
900000	13	12	12	12	13
950000	13	13	13	13	13
1000000	13	13	13	13	13

Таблица 2. Характеристики первого уровня Ω_1 спектра Ω для последовательностей, задающих приближения величин π , e , $\sqrt[3]{2}$, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\zeta(3) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^3}$.

Порядок рекуррентной формы	π	e	$\sqrt[3]{2}$	$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\zeta(3) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^3}$
1	4	5	5	3	5
2	23	10	25	14	5
3	64	10	25	63	52
4	136	10	224	90	183
5	556	500	800	989	612
6	1302	500	872	1211	843
7	4608	2738	3673	3551	2854
8	15442	23552	6733	15320	11923
9	33853	29433	62895	24707	73588
10	240489	159939	278219	111204	96694
11	694410	172265	389536	320819	96694
12	857994	947499	988084	942583	846617
13	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000

Таблица 3. Характеристики нулевого уровня Ω_0 спектра Ω для последовательностей, задающих приближения величин $\sqrt{2}$, $\ln(2)$, $\ln(10)$, константы Каталана и константы Эйлера.

Длина	$\sqrt{2}$	$\ln(2)$	$\ln(10)$	константа Каталана	константа Эйлера
50	3	3	4	5	4
100	5	4	5	5	4
1000	6	6	6	6	6
2000	7	8	7	7	7
5000	8	8	9	8	8
10000	8	10	9	10	8
20000	8	10	9	10	8
50000	10	10	10	10	10
100000	11	10	10	10	10
150000	11	11	10	10	11
200000	11	11	11	12	11
250000	11	11	11	12	11
300000	11	11	11	12	11

Длина	$\sqrt{2}$	$\ln(2)$	$\ln(10)$	константа Каталана	константа Эйлера
350000	11	11	12	12	11
400000	11	11	12	12	12
450000	11	11	12	12	12
500000	11	11	12	12	12
550000	11	11	12	12	12
600000	12	11	12	12	12
650000	12	11	12	12	12
700000	12	11	12	12	12
750000	12	11	12	12	12
800000	12	11	12	12	12
850000	12	12	12	12	12
900000	12	12	12	12	12
950000	12	12	12	12	12
1000000	12	12	12	12	12

Таблица 4. Характеристики первого уровня Ω_1 спектра Ω для последовательностей, задающих приближения величин $\sqrt{2}$, $\ln(2)$, $\ln(10)$, константы Каталана и константы Эйлера.

Порядок рекуррентной формы	$\sqrt{2}$	$\ln(2)$	$\ln(10)$	константа Каталана	константа Эйлера
1	4	8	4	5	4
2	4	20	20	9	14
3	54	61	31	44	22
4	90	263	75	44	119
5	177	397	186	493	358
6	1727	1029	1473	1760	1439
7	2213	1493	4393	2855	3824
8	27278	5295	4393	9733	24170
9	34745	8569	33233	9733	27532
10	81199	119254	183978	154020	115831
11	552217	815449	331272	155872	393168
12	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000

Теорема 5. Законы функционирования автоматов из $\alpha^m(H_d)$, где $d=500000$, по сложности:

- определяемой нулевым уровнем Ω_0 спектра Ω образуют 2 класса эквивалентности по сложности: $\{A_d^m(\pi), A_d^m(\sqrt{2}), A_d^m(\ln(2))\}$ и $\{A_d^m(e), A_d^m(\varphi), A_d^m(\sqrt[3]{2}), A_d^m(\ln(10)), A_d^m(\zeta(3)), A_d^m(C), A_d^m(\gamma)\}$;
- определяемой первым уровнем Ω_1 спектра Ω образуют одноэлементные классы эквивалентности по сложности.

Заключение

Изложенные в работе результаты показывают возможность практического использования спектра динамических параметров для определения свойств законов функционирования дискретных детерминированных динамических систем на основе исследования свойств числовых последовательностей, взаимно-однозначно определяющих законы функционирования.

Базовой моделью дискретных детерминированных динамических систем являются конечные детерминированные автоматы. Сравнение по сложности таких автоматов может быть сделано на основе сравнения математических структур, представляющих специфику законов функционирования автомата. В качестве таких структур могут быть использованы геометрические образы законов функционирования автоматов. Геометрический образ построен на основе, во-первых, линейного упорядочивания элементов автоматного отображения, а, во-вторых, извлечения из линейно упорядоченного автоматного отображения последовательности вторых координат точек. Сравнение по сложности законов функционирования автоматов производится на основе сравнения спектров последовательностей. На основании того, что на структуру характеристических последовательностей ограничения не накладываются и она может быть любой последовательностью элементов из конечного множества, метод сравнения моделей по сложности допускает интерпретацию на любых, в частности числовых, последовательностях. С содержательной точки зрения спектрами определяется сложность последовательностей с учётом свойств различных вариантов рекуррентных определений последовательностей. В вариантах таких определений числовыми показателями являются порядки рекуррентных форм, определяющих отдельные отрезки последовательностей, и количества смен рекуррентных форм, используемых для определения отрезков последовательности.

Литература

1. *Твердохлебов В.А.* Геометрические образы конечных детерминированных автоматов // Известия саратовского университета (Новая серия). Том 5. Вып.1. 2005. С.141-153.
2. *Твердохлебов В.А.* Геометрические образы законов функционирования автоматов.– Саратов: Изд-во «Научная книга», 2008. – 183с.
3. *Твердохлебов В.А., Епифанов А.С.* Представление автоматных отображений геометрическими структурами. – Саратов: Изд-во «Наука», 2013. – 204с.
4. *Глушков В.М.* Синтез цифровых автоматов. –М.: Физматгиз. –1962. –476с.
5. *Гилл А.* Введение в теорию конечных автоматов. – М.: Наука, 1966. – 262с.
6. *Мур Э.* Умозрительные эксперименты с последовательными машинами / Автоматы. Сб. статей под ред. К. Шеннона и Д. Маккарти, ИИЛ, М., 1956, с. 179-213.
7. *Твердохлебов В.А.* Оценка сложности управления движением по известному маршруту. // Ж-л «Проблемы управления». М. №5 2009. С.69-73.