НОВЫЕ СВОЙСТВА СТРАТЕГИЙ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИИ ИХ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Гранин С.С., Мандель А.С
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
ssgranin@gmail.com; almandel@yandex.ru

Аннотация: представлены результаты имитационного моделирования стационарных стратегий управления запасами с использованием усовершенствованного пакета программ в среде MATHLAB в условиях действия случайных возмущений и при учете ненадежности поставщиков. Полученные результаты позволили выявить некоторые неожиданные свойства оптимальных стационарных стратегий и дать им теоретическое обоснование.

Ключевые слова: управление запасами, стационарные режимы, случайные возмущения.

Введение

В настоящей работе представлены результаты имитационного моделирования стационарных стратегий управления запасами с использованием усовершенствованного пакета программ в среде MATHLAB в условиях действия случайных возмущений и при учете ненадежности поставщиков (см. обзор [1] и работы [2–5]. Полученные результаты позволили выявить некоторые неожиданные свойства оптимальных стационарных стратегий и дать им основанные на математической теории управления запасами и производством [6, 7] теоретические обоснования.

1 Постановка задачи

Рассматривается многошаговая однопродуктовая задача управления запасами в дискретном времени с критерием оптимальности в форме минимума суммарных средних затрат в периоде планирования. В критерии оптимальности учитываются затраты на хранение с коэффициентом h удельных затрат на хранение на одном шаге; потери вследствие дефицита с коэффициентом d удельных потерь вследствие дефицита на одном шаге и затраты на пополнение запасов с фиксированной составляющей расходов на одну поставку в размере A и пропорциональной компонентой затрат в размере cu, где c – стоимость при обретения складом одной единицы товара, а u – размер поставки (управление). Кроме того, учитывается переоценка будущих затрат с коэффициентом дисконтирования α: $0 \le \alpha \le 1$.

Как известно [6, 7], оптимальная стратегия управления запасами формируется в результате решения уравнений дискретного динамического программирования и оказывается двухуровневой. Иначе говоря, для каждого номера шага n (в обратном времени) можно указать два числа R_n и r_n таких, что оптимальная стратегия управления запасами состоит в выборе размера поставки $u_n(x)$, где x – текущий уровень запаса в начале шага, с использованием приведенной ниже формулы:

$$(1)\ u_n(x) = \begin{cases} R_n - x, & \text{если } x \le r_n, \\ 0, & \text{если } x > r_n. \end{cases}$$

Текущие (по номеру n) значения параметров R_n и r_n обладают тем свойством, что существуют пределы $R = \lim_{n\to\infty} R_n$ и $r = \lim_{n\to\infty} r_n$, которые называются параметрами стационарной стратегии управления запасами. Эти параметры используются тогда, когда период планирования очень велик и, как показывают эксперименты, на текущие значения параметров, зависящие от номера индекса n можно переходить достаточно поздно.

Представляет интерес изучение свойств стационарных значений параметров R и r в зависимости от значений коэффициента дисконтирования α, а также стоимостных параметров h, d, c и A. Не менее важно оценить скорость сходимости параметров R_n и r_n к их предельным значениям R и r.

Проблема в том, что для этого нужно решать упомянутые выше уравнения дискретного динамического программирования. Процедура эта – сложная и времяемкая. Авторам удалось разработать новый программный инструмент решения этой задачи, который позволил ускорить процесс решения в десятки раз. Новый способ базируется на некоторых свойствах алгоритма динамического программирования, позволяющих упростить вычисления за счет использования ранее полученной расчетной информации. Этот способ находится в ряду методов, который А.А. Лазарев и Е.М. Гафаров назвали графическим методом [8], но опирается на другие свойства задач дискретной оптимизации. Рассматриваемые в настоящей работе вероятностные задачи дискретного динамического программирования не укладываются в схему графического метода, предложенного для детерминистских постановок задач.

В дальнейшем соответствующие процедуры решения будут условно названы имитационным моделированием. Описанию полученных результатов посвящен следующий раздел настоящей работы.

2 Результаты имитационного моделирования

Приведем несколько графиков, полученных в результате имитационного моделирования. При этом рассматривалось три варианта распределений спроса на одном шаге: (а) экспоненциальное распределение, (б) гауссово распределение и (в) равномерное распределение. Все эти распределения были выбраны так, чтобы, как правило) их математические ожидания μ совпадали (было выбрано $\mu = 5$). Однако сначала будут представлены результаты моделирования для случая, когда параметр λ экспоненциального закона распределения был равен 1. Расчеты проводились для следующих значений параметров:

$A = 100$

$c = 5$

$h = 1$

$d = 10$

$F(x)$ = 1 - lambda * exp(-lambda * x)

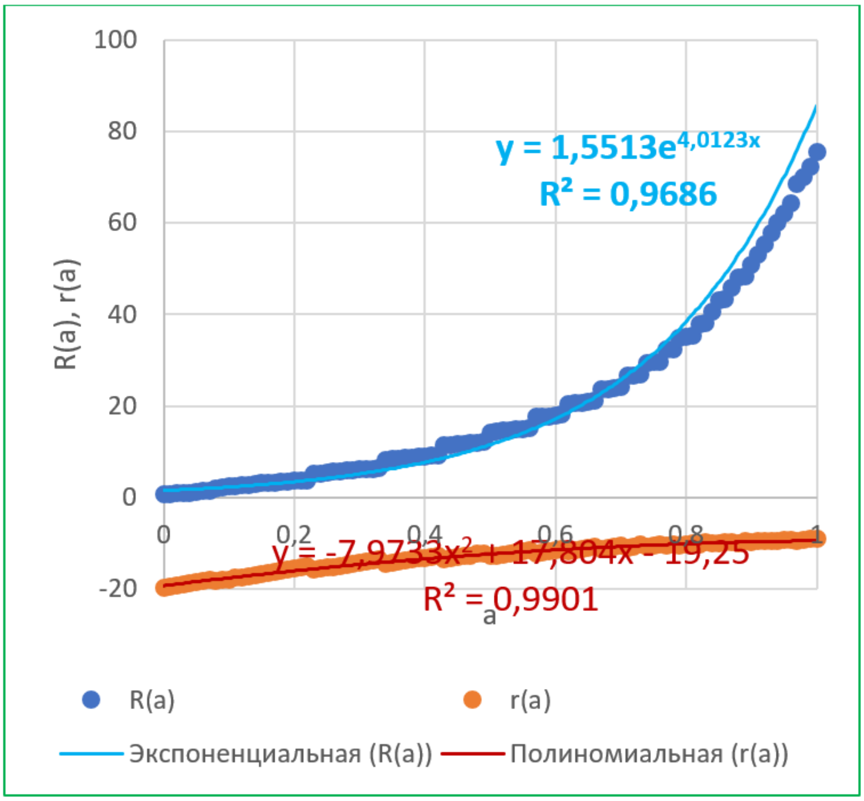

Рис. 1. Графики зависимостей R(α) и r(α) для экспоненциального распределения спроса.

Следующий пример относится к случаю моделирования гауссова и равномерного распределения спроса со следующими значениями параметров:

Нормальное	**Экспоненциальное**
$\sigma = 1, \mu = 5$	$\lambda = 1$
$c = 5$	$c = 5$
$h = 1$	$h = 1$
$d = 20$	$d = 20$

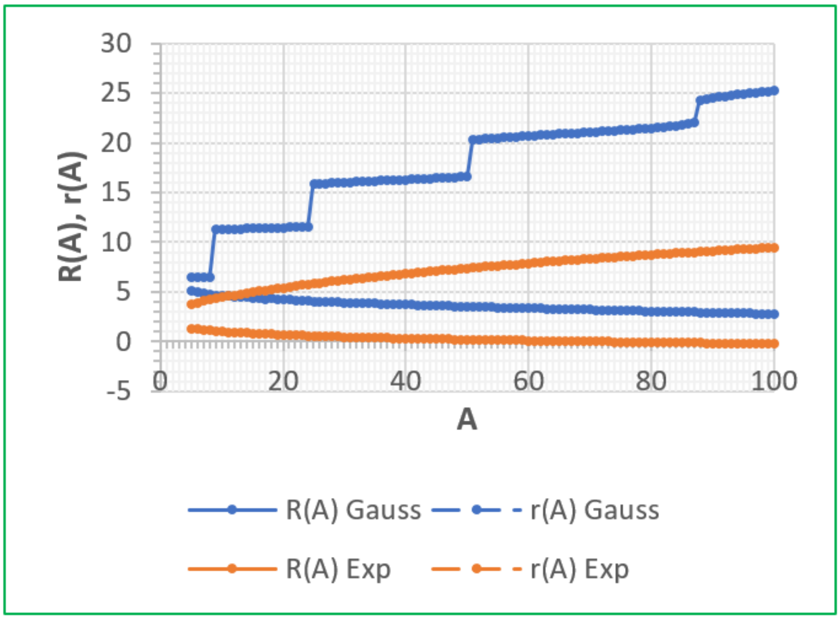

Рис. 2. Графики зависимостей R(α) и r(α) для случаев гауссова и экспоненциального распределений спроса.

Теперь приведем графики зависимостей $R(h)$ и $r(h)$ также для случаев гауссова и экспоненциального распределений спроса. При следующих значенияЫх остальных параметров:

Нормальное	Экспоненциальное
$\sigma = 1$, $\mu = 5$	$\lambda = 1$
$\boldsymbol{\alpha} = 0{,}9$	$\boldsymbol{\alpha} = 0{,}9$
$c = 5$	$c = 5$
$A = 50$	$A = 50$
$d = 20$	$d = 20$

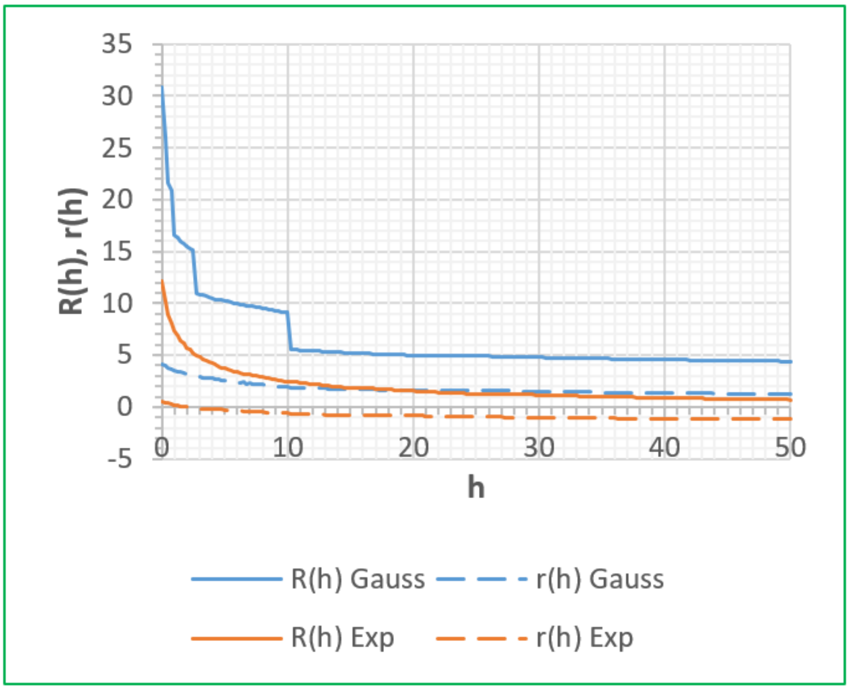

Рис. 3. Графики зависимостей R(h) и r(h) для случаев гауссова и экспоненциального распределений спроса.

Как видно из рис. 3 и здесь для гауссова распределения образуется «лестница».

Далее приводятся сравнительные результаты для трех распределений спроса: экспоненциального, гауссова и равномерного (два варианта). Значения параметров выбраны в соответствии со следующей таблицей:

Нормальное	Экспоненциальное	Равномерное 1	Равномерное 2
$\mu = 6$, $\sigma = 2$	$\lambda = 1$	$a = 0$, $b = 10$	$a = 2$, $b = 8$
$A = 50$	$A = 50$	$A = 50$	$A = 50$
$c = 5$	$c = 5$	$c = 5$	$c = 5$
$h = 1$	$h = 1$	$h = 1$	$h = 1$
$d = 20$	$d = 20$	$d = 20$	$d = 20$

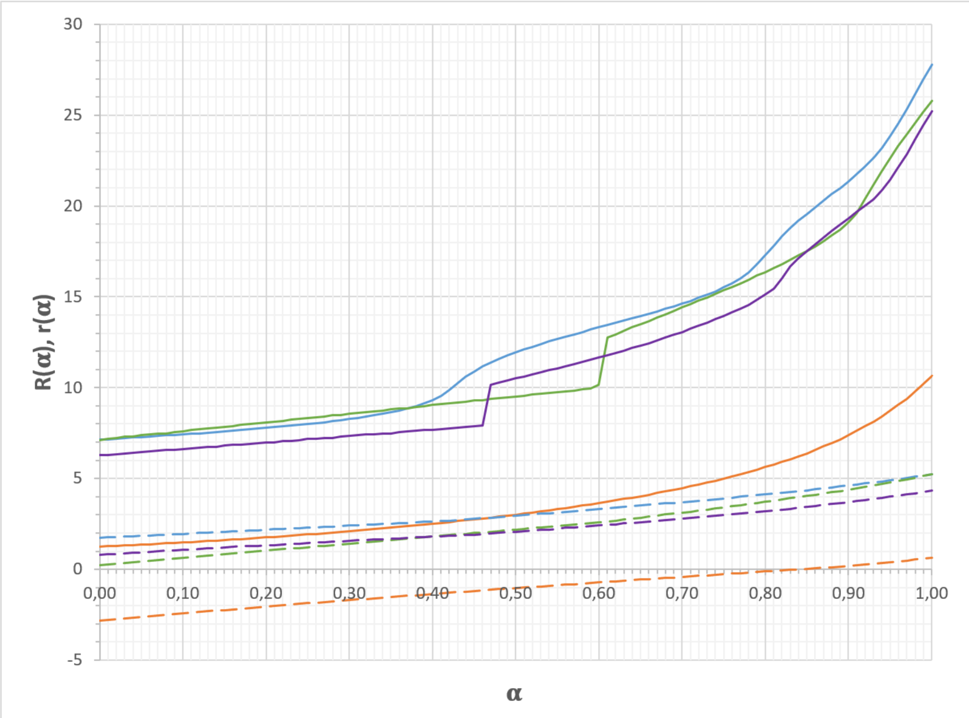

Рис. 4. Графики зависимостей R(α) и r(α) для случаев гауссова, экспоненциального и равномерного распределений спроса.

И снова заметно появление «лестницы» в зависимости от коэффициента дисконтирования (особенно для равномерного 2 и гауссова распределений (см. следующий раздел).

3 Обоснование и интерпретация результатов моделирования

Необходимо отметить, что выявление «лестничных» зависимостей параметра R от коэффициента дисконтирования α оказалось неожиданностью. Чтобы разобраться в этом, важно вспомнить, что нормальный или равномерный законы распределения описывают случайные величины, которые более «детерминированы», нежели случайные величины, описываемые экспоненциальным законом распределения. В самом деле, при стремлении среднеквадратического отклонения σ гауссова закона к 0 это распределение вырождается в чисто детерминистский скачок. То же самое можно сказать о равномерном законе распределении при стремлении его правой a и левой b границ к среднему значению μ. (равномерное распределение 2 в приведенном выше примере гораздо уже равномерного распределения 1). В этом контексте только экспоненциальный закон распределения максимально далек от описания детерминированных величин.

Поэтому, чтобы понять, откуда берется полученная слегка наклонная «лесенка», рассмотрим случай детерминированного спроса, который на каждом дискретном шаге будет равен 5 (заданному выше среднему значению случайного спроса. Тогда, сохраняя все остальные эконометрические параметры задачи прежними, кроме α, которое выберем равным 1, построим следующую дискретную и детерминированную модель управления запасами, обобщающую модель, рассмотренную в монографии [6].

Требуется определить оптимальный размер заказа u, который в силу однородности и симметрии задачи будет фиксированным и равным Q. Это значение однозначно определит значение интервала между очередными поставками $T_п$ и значение точки подачи заказа r. Картина изменения уровня запаса в системе представлена на рис. 5.

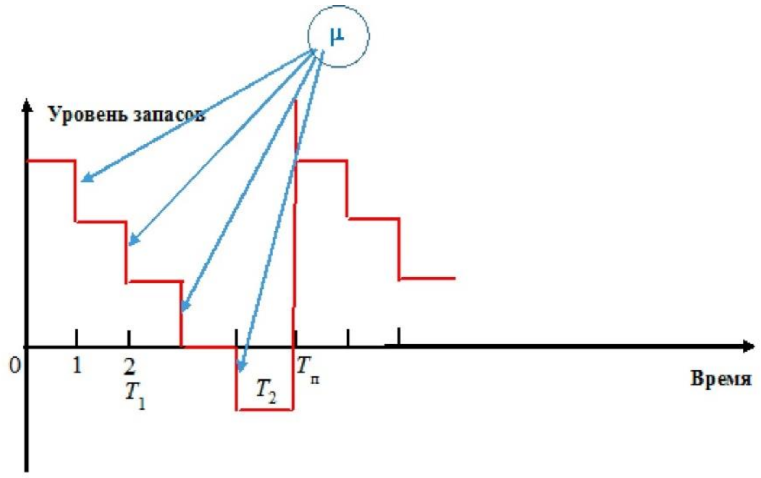

Рис. 5. График изменения уровня запасов в детерминированной дискретной модели.

Тогда, следуя картинке на рис. 5, где, через T_1 обозначен интервал времени (между соседними поставками), когда запас положителен, а через T_2 обозначен интервал времени (между соседними поставками), когда запас отрицателен, так что $T_п = T_1 + T_2$, можно записать выражение для суммарных затрат в интервале между поставками:

$$(1) \qquad C_{T_п} = \mu h \sum_{i=1}^{(Q-r)/\mu} i + \mu d \sum_{j=1}^{r/\mu} j + A + cQ.$$

Чтобы упростить запись, будем считать, что Q и r делятся без остатка на μ. Тогда, используя дополнительные выражения для целочисленных значений $T_п$, T_1 и T_2: $T_п = K$, $T_1 = I$, $T_2 = J$ и $K = I + J$, где K, I и J – натуральные числа, причем $K = Q/\mu$, $I = (Q - r)/\mu$, а $J = r/\mu$. Осталось определить среднее значение затрат в единицу времени, разделив $C_{T_п}$ из формулы (2) на величину периода $T_п$ между поставками, определив тем самым минимизируемый функционал C_1:

$$(2) \qquad C_1 = C_{T_п}/K.$$

Минимизируя (3) по Q и r, можно получить оптимальное значение Q через связанное с ним целочисленное значение K. Оптимальное K^* представляет собой наибольшее значение натурального числа K, которое удовлетворяет неравенству (4):

$$(3) \qquad K(K-1) < \frac{2(h+d)\mu A}{dh}.$$

Нетрудно получить и выражение для оптимального значения r.

Что же следует из приведенных выкладок? Например, то, что с ростом h или какого-нибудь эконометрического параметра решения неравенства (4) изменяются скачкообразно, образуя «лестницу» с горизонтальными ступенями. Тот же самой вывод можно было бы сделать и при учете отличного от 1 коэффициента дисконтирования α. Понятно, что, если спроса случаен, но случайность «близка» к детерминистскому случаю, то ступеньки этой «лестницы» отклонятся от горизонтали. «Лестница» станет наклонной, что и подтверждается графиками на рис. 2–4.

Заключение

Представлены результаты моделирования системы управления запасами в дискретном времени. Моделирование позволило оценить роль случайных возмущении в эволюции системы и обнаружить, что в характере изменения параметров оптимальных стратегий возможно наличие флуктуаций, обусловленных тем, насколько отличаются от детерминированных реальные распределения спроса.

Литература

1. *Ivanov D., Dolgui A., Sokolov B.* Supply Chain Design With Disruption Considerations: Review of Research Streams on the Ripple Effect in the Supply Chain / Preprints of the 15th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing May 11-13, 2015. Ottawa, Canada. – P. 1745–1752.

2. *Mandel A., Granin S., Vilms M.* Simulation of inventory control process for supply chain with several suppliers / Proceedings of the 10th International Conference “Management of Large-Scale System Development” (MLSD). M.: IEEE, 2017. https://ieeexplore.ieee.org/document/8109628/.
3. *Ghorbel N. Addouche, S-A., Mhamedi A. El*, Forward management of spare parts stock shortages via causal reasoning using reinforcement learning. / Preprints of the 15th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing May 11-13, 2015. Ottawa, Canada/ - P. 1117–1122.
4. *Mandel A., Granin S.* Optimization of Inventory Management Process / Proceedings of the 8th IEEE International Conference on Logistics, Informatics and Service Science (LISS2018). Bejing: IEEE CFP18LIS-CDR, 2018. P. 178-182.
5. *Sawik T.* Integrated Supply Chain Scheduling under Multi-Level Disruptions. / Preprints of the 15th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing May 11-13, 2015. Ottawa, Canada. – P. 1560–1565.
6. *Hadley G., Whitin T. M.* Analysis of Inventory Systems, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.
7. *Лотоцкий В.А., Мандель А.С.* Управление запасами: модели и Методы. – Москва: Наука, 199l – 188 с.
8. *Лазарев А.А., Гафаров Е.Р.* Теория расписаний. Задачи и алгоритмы. Учебное пособие. М.: МГУ, 2011. – 224 с.