УПРАВЛЕНИЕ РИСКАМИ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ДОБРОЖЕЛАТЕЛЬНЫМ ИГРОКОМ

Горелов М.А
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН
griefer@ccas.ru

Аннотация. Исследуются две иерархических игры со случайными факторами, в которых игрок верхнего уровня помимо выбора своего управления выбирает еще и приемлемую для него степень риска. Приводится и анализируется определение максимального гарантированного результата в предположении доброжелательности игрока нижнего уровня. Предлагается три содержательных интерпретации изучаемых моделей.

Ключевые слова: информационная теория иерархических систем, максимальный гарантированный результат в игре с доброжелательным игроком, принцип Value at Risk.

Введение

Данный доклад посвящен исследованию иерархической игры двух лиц со случайным фактором. Подобные модели начали активно исследоваться в 70-х годах прошлого века практически одновременно и независимо в теории иерархических игр, теории активных систем и теории контрактов (обзоры полученных результатов и дальнейшие ссылки можно найти в [1 - 3]). Практически во всех работах, посвященных исследованию такого рода моделей, делается одно существенное предположение: игрок верхнего уровня предполагается риск-нейтральным по отношению к внешней неопределенности. Это достаточно естественный, но не единственно возможный подход.

В данном докладе это предположение заменяется принципом Value at Risk. Смысл соответствующих конструкций таков. Фиксируется некое число $\xi\in[0,1]$. В множестве A значений случайного фактора выбирается подмножество B, мера которого не меньше заданного числа ξ, и значения случайного фактора, не принадлежащие B исключаются из рассмотрения. А далее игрок верхнего уровня предполагается осторожным по отношению к реализовавшемуся значению неопределенного фактора.

Этот принцип достаточно популярен среди экономистов (см. [4]) но в теоретико-игровых моделях до недавнего времени не использовался. Исследование таких моделей было начато в [5]. Оказалось, что эти модели имеют достаточно интересные содержательные интерпретации. Подробнее о них будет сказано ниже.

В [5] предполагалось, что игрок верхнего уровня осторожен по отношению к рациональным выборам второго игрока. В данном докладе делается иное предположение: игрок нижнего уровня предполагается доброжелательным к своему партнеру. Такой принцип оптимальности тоже достаточно широко распространен (иногда его называют равновесием Штакельберга).

Однако есть одна проблема. Традиционное определение математически корректно только в том случае, когда в рассматриваемой игре при любой фиксированной стратегии игрока верхнего уровня максимум выигрыша его партнера (по его управлениям) непременно достигается. Это предположение вполне естественно, если рассматриваются игры без обратной связи. Если же модель предусматривает возможность реакции игрока верхнего уровня на выбор партнера, такое допущение становится весьма ограничительным.

Альтернативное определение подобного принципа оптимальности было впервые предложено в [6]. Правда, там оно подробно не обсуждалось. Ниже установлено соответствие нового определения традиционному в тех случаях, когда последнее корректно.

В докладе исследуются две модели описанного типа. В обеих предполагается, что игрок верхнего уровня обладает правом первого хода. В одной из них предполагается, что выбирая решение, игрок верхнего уровня не имеет информации о выборе партнера. В другой считается, что игрок верхнего уровня в момент окончательного выбора своего управления точно знает выбор второго игрока. В обеих моделях предполагается, что игрок нижнего уровня в момент принятия решения знает реализовавшееся значение случайного фактора, а игроку верхнего уровня известна только вероятностная мера на множестве его возможных значений.

1 Игры со случайными факторами

Игрой со случайными факторами в дальнейшем будем называть шестерку $\Gamma = \langle U, V, A, g, h, \wp\rangle$. Здесь U, V и A – множества, g – функция, отображающая декартово произведение $U \times V$ в множество действительных чисел $\mathbf{R}$, h: $U \times V \times A \to \mathbf{R}$, а $\wp$ – вероятностная мера на множестве A.

Интерпретируются эти конструкции следующим образом. Предполагается, что в игре имеются два участника, которых будем называть первым и вторым игроками. Множество U интерпретируется как множество управлений первого игрока, множество V – как множество управлений его партнера. Будем полагать, что интересы первого и второго игроков описываются стремлением к максимизации функций g и h соответственно. Значение неопределенного фактора $\alpha \in A$ выбирается некоторой третьей стороной – Природой. Этот выбор осуществляется случайным образом в соответствии с распределением $\wp$.

Сделаем традиционные технические предположения, заметно упрощающие дальнейшее изложение. Множества U, V и A будем считать наделенными топологиями и компактными. Функции g и h будем предполагать непрерывными по совокупности своих аргументов. Меру $\wp$ будем считать борелевской.

Рассмотрим другую игру $\Gamma_* = \langle U_*, V_*, A, g_*, h_*, \wp\rangle$, определенным образом связанную с игрой Γ.

Обозначим через $\Phi(X,Y)$ класс всех функций из множества X в множество Y. Пусть $U_* = \Phi(V \times A, U)$, $V_* = V \times A$, а функции g_* и h_* определяются условиями

$$g_*(u_*,v_*) = g(u_*(v,\beta),v),\ h_*(u_*,v_*,\alpha) = h(u_*(v,\beta),v,\alpha),$$

где $v_* = (v,\beta)$. Множество A и мера $\wp$ на нем те же, что и в игре Γ.

Интерпретировать эти конструкции можно следующим образом. Игроки выбирают свои «физические» управления из множеств U и V. Но к моменту выбора своего управления $u \in U$ первый игрок получает достоверную информацию об управлении $v \in V$, выбранном его партнером. Кроме того, второй игрок может передать первому информацию о реализации неопределенного фактора. Однако эта информация не обязана быть достоверной, то есть второй игрок вправе выбрать некоторое сообщение $\beta \in A$, которое он передаст партнеру. Свое физическое управление $u_*(v,\beta)$ первый игрок выбирает на основе всей полученной информации, а выигрыши обоих игроков зависят лишь от сделанных ими физических выборов, и не зависят от того, какой информацией они обменивались.

Говоря в содержательных терминах, можно сказать, что игра Γ описывает управление без обратной связи, а игра Γ_* – управление с обратной связью. Но чисто формально игры с обратной связью являются частными случаями игр без обратной связи. Просто множества стратегий игроков в игре с обратной связью наделены специальными структурами. В рассмотренном выше примере множество стратегий второго игрока наделено структурой декартова произведения, а множество стратегий первого игрока – структурой функционального пространства.

Разумеется, сказанное не относится к дополнительным предположениям относительно игры Γ: мы не предполагаем наличия топологий на множествах U_* и V_* и выполнения связанных с этим свойств непрерывности и компактности. В этом смысле полученные далее результаты, относящиеся к играм Γ и Γ_*, являются независимыми. Но там, где эти дополнительные предположения не используются, мы будем формулировать и доказывать результаты один раз в терминах более общей игры Γ.

2 Гарантированный результат в играх с доброжелательным вторым игроком

Игра Γ описывает возможности и интересы игроков. Для замыкания модели нужно еще описать динамику принятия решений и отношение игроков к имеющейся у них неопределенности. Начнем с интерпретации.

Считаем, что все параметры игры Γ точно известны первому игроку. Будем предполагать, что события разворачиваются следующим образом. Вначале первый игрок выбирает свое управление $u \in U$. Затем реализуется конкретное значение неопределенного фактора $\alpha \in A$ (в соответствии с заданной вероятностной мерой $\wp$). Значения u и α становятся известными второму игроку. Таким образом, для второго игрока никакой неопределенности не остается. Если функция выигрыша h действительно описывает интересы второго игрока, то он выберет управление, максимизирующее значение этой функции при заданных значениях u и α. В дополнение к этому будем считать, что второй игрок доброжелателен к партнеру, т. е. если точек максимума его функции выигрыша несколько, то он выберет ту из них, которая предпочтительнее для первого игрока. Такой принцип поведения известен первому игроку. Но поскольку значение α первому игроку не известно, для него этот результат является случайной величиной. Отношение первого игрока к этой неопределенности следующее. Он согласен исключить из рассмотрения некоторое число «форсмажорных» событий, суммарная вероятность которых меньше заданной величины $1 - \xi$. А в остальном он ориентируется на наихудший для себя случай и хочет получить максимальный гарантированный результат.

Стандартный способ формализации этих соображений таков. При сделанных предположениях наиболее выгодными для второго игрока являются стратегии из множества

$$(1) \qquad BR(u,\alpha) = \left\{ v \in V : h(u,v,\alpha) = \max_{w \in V} h(u,w,\alpha) \right\}.$$

В предположении доброжелательности он выберет стратегию, доставляющую максимум $\max\limits_{v \in BR(u,\alpha)} g(u,v)$. Поэтому первому игроку следует выбирать управление так, чтобы максимизировать величину $\sup\limits_{B} \inf\limits_{\alpha \in B} \max\limits_{v \in BR(u,\alpha)} g(u,v)$, где внешний супремум берется по всем измеримым подмножествам B множества A, для которых $\wp(B) \geq \xi$. И при правильном выборе стратегии u он может рассчитывать на получение результата

$$(2) \qquad R_\kappa(\Gamma) = \sup_{u \in U} \sup_{B} \inf_{\alpha \in B} \max_{v \in BR(u,\alpha)} g(u,v).$$

Проблема возникает в том случае, когда стратегия u такова, что максимум в определении множества $BR(u,\alpha)$ не достигается. В этом случае определение следует уточнить, и здесь стандартный способ не очень годится.

При отсутствии предположения о доброжелательности второго игрока поступают так. Множество $BR(u,\alpha)$ в случае, когда максимум в формуле (1) не достигается, доопределяется условием

$$BR(u,\alpha) = \left\{ v \in V : h(u,v,\alpha) \geq \sup_{w \in V} h(u,w,\alpha) - \kappa \right\},$$

где κ – какое-то положительное число, и максимальный гарантированный результат определяют формулой

$$(3) \qquad \sup_{u \in U} \sup_{B} \inf_{\alpha \in B} \min_{v \in BR(u,\alpha)} g(u,v).$$

При таком определении оказывается, что в наиболее интересных случаях среди оптимальных стратегий первого игрока непременно найдутся такие, что максимум в формуле (1) достигается и, как следствие, результат задаваемый формулой (3) не зависит от κ. В общем, получающаяся задача имеет вполне разумное решение.

В предположении доброжелательности все не так. При подобной постановке задачи первый игрок «провоцируется» специально выбирать такие стратегии, при которых максимум в формуле (1) не достигается. Это плохо соответствует содержательным представлениям. По сформулированной причине результат $R_\kappa(\Gamma)$ будет зависеть от величины κ. Это затрудняет как интерпретацию, так и идентификацию получающейся модели. Кроме того, решения аналогичных задач оказываются весьма сложными (см., например, [6]). А потому применение полученных результатов становится затруднительным. Можно ожидать, что то же будет относиться и к нашему случаю.

Поэтому пойдем другим путем. Будем рассуждать по аналогии. В [6] предложено следующее определение

Определение 1. Пусть задано число $\xi \in [0,1]$. Число γ является ξ-гарантированным результатом первого игрока в игре Γ, если существуют измеримое множество $B \subset A$, мера $\wp(B)$ которого больше или равна ξ, и такая стратегия $u \in U$, что для любого $\alpha \in B$ найдется число λ, для которого выполняются следующие условия:

1°. существует $w \in V$, для которого $h(u,w,\alpha) \geq \lambda$;

2°. для любого $v \in V$ либо $g(u,v) \geq \gamma$, либо $h(u,v,\alpha) < \lambda$.

Точная верхняя грань ξ-гарантированных результатов первого игрока называется его максимальным ξ-гарантированным результатом.

Можно показать, что в наиболее интересных случаях максимальный ξ-гарантированный результат равен величине (3). Попробуем модифицировать это определение с учетом предположения доброжелательности второго игрока. Дл краткости, перейдем на язык исчисления предикатов.

Число γ является ξ-гарантированным результатом первого игрока в игре Г, если выполняется условие

$$\exists B \subset A : \wp(B) \geq \xi \exists u \in U \forall \alpha \in B \exists \lambda \left[\exists w \in V : h(u,w,\alpha) \geq \lambda\right] \& \left[\forall v \in V g(u,v) \geq \gamma \vee h(u,v,\alpha) < \lambda\right]. \quad (4)$$

Для управления w, существование которого предусмотрено первым пунктом определения 1, в силу второго пункта того же определения выполняется неравенство $g(u,w) \geq \gamma$, поэтому условие (4) равносильно условию

$$\exists B \subset A : \wp(B) \geq \xi \exists u \in U \forall \alpha \in B \exists \lambda \left[\exists w \in V : h(u,w,\alpha) \geq \lambda \,\&\, g(u,w) \geq \gamma\right] \& \left[\forall v \in V g(u,v) \geq \gamma \vee h(u,v,\alpha) < \lambda\right].$$

Если мы поменяем один знак строго неравенства в этой формуле на знак нестрогого неравенства, то придем к следующему определению.

Определение 2. Пусть задано число $\xi \in [0,1]$. Число γ является ξ-гарантированным результатом первого игрока в игре Г с доброжелательным вторым игроком, если существуют измеримое множество $B \subset A$, мера $\wp(B)$ которого больше или равна ξ, и такая стратегия $u \in U$, что для любого $\alpha \in B$ найдется число λ, для которого выполняются следующие условия:

1°. существует $w \in V$, для которого $h(u,w,\alpha) \geq \lambda$ и $g(u,v) \geq \gamma$;

2°. для любого $v \in V$ либо $g(u,v) \geq \gamma$, либо $h(u,v,\alpha) \leq \lambda$.

Точная верхняя грань $R(\Gamma)$ всех ξ-гарантированных результатов первого игрока называется его максимальным ξ-гарантированным результатом в игре с доброжелательностью.

«Оправданием» этого определения могут служить два факта. Во-первых, в случае, когда определение величины $R_\kappa(\Gamma)$ логически корректно, имеет место равенство $R(\Gamma) = R_\kappa(\Gamma)$. А во-вторых, при использовании определения 2 получаются содержательно осмысленные результаты. Доказательству первого факта посвящена оставшаяся часть данного параграфа. Доказательству второго – остальная часть статьи.

Докажем два простых утверждения. В множестве U можно выделить подмножество U^r таких стратегий, что максимум $\max\limits_{v \in V} h(u,v,\alpha)$ достигается для всех $\alpha \in A$. Наряду с игрой $\Gamma = \langle U,V,\Omega,A,g,h \rangle$ можно рассмотреть игру $\Gamma^r = \langle U^r,V,\Omega,A,g,h \rangle$ (здесь сужения функций g и h на множество U^r обозначено теми же буквами). Малоинтересный случай, когда $U^r = \varnothing$ оставим без внимания.

Очевидно, $R(\Gamma^r) \leq R(\Gamma)$ и $R_\kappa(\Gamma^r) \leq R_\kappa(\Gamma)$.

Лемма 1. Справедливо неравенство $R(\Gamma^r) \leq R_\kappa(\Gamma)$.

Доказательство. Пусть γ – любой ξ-гарантированный результат первого игрока в игре Γ^r в смысле определения 2.2. Фиксируем стратегию $u \in U^r$ и множество $B \subset A$, существование которых предусмотрено определением 2.2, произвольное $\alpha \in A$ и число λ, для которого выполняются пункты 1° и 2° этого определения (для выбранных u и α).

В силу первого пункта определения для некоторого $w \in V$ выполняется неравенство $h(u,w,\alpha) \geq \lambda$, поэтому $\lambda \leq \max\limits_{v \in V} h(u,v,\alpha)$. Если $\lambda < \max\limits_{v \in V} h(u,v,\alpha)$, то для любого $v \in BR(u,\alpha)$ имеем $h(u,v,\alpha) > \lambda$ и в силу второго пункта определения будет верно неравенство $g(u,v) \geq \gamma$. А если $\lambda = \max\limits_{v \in V} h(u,v,\alpha)$, то $BR(u,\alpha) = \{v \in V : h(u,v,\alpha) \geq \lambda\}$, и тогда $w \in BR(u,\alpha)$. В обоих случаях отсюда следует условие $\sup\limits_{v \in BR(u,\alpha)} g(u,v) \geq \gamma$, а так как $\alpha \in A$ выбрано произвольно, то $\inf\limits_{\alpha \in A} \sup\limits_{v \in BR(u,\alpha)} g(u,v) \geq \gamma$ и тем более $R_\kappa(\Gamma) = \sup\limits_{u \in U} \sup\limits_{B} \inf\limits_{\alpha \in A} \sup\limits_{v \in BR(u,\alpha)} g(u,v) \geq \gamma$.

Так как γ – произвольный гарантированный результат в игре Γ^r, отсюда следует неравенство $R(\Gamma^r) \leq R_\kappa(\Gamma)$, что и требовалось доказать.

Справедливо аналогичное утверждение.

Лемма 2. Имеет место неравенство $R_\kappa(\Gamma^r) \leq R(\Gamma)$.

Доказательство. Фиксируем произвольное число $\gamma < R_\kappa(\Gamma^r)$. Выберем стратегию множество $B \subset A$ ($\wp(B) \geq \xi$) и $u \in U^r$ так, что

$$(5) \quad \inf_{\alpha \in A} \max_{v \in BR(u,\alpha)} g(u,v) \geq \gamma.$$

Пусть α – любой параметр из множества *B*. Положим $\lambda = \max_{v \in V} h(u,v,\alpha)$. Пусть $w \epsilon BR(u,\alpha)$ доставляет максимум $\max_{v \in BR(u,\alpha)} g(u,v)$. Тогда для этого *w* пункт 1° определения 2 выполнен. В силу условия (5). А в силу определения числа λ для всех $v \in V$ выполняется неравенство $h(u,v,\alpha) \leq \lambda$. Таким образом, выполнен и второй пункт определения 2. Значит, $\gamma - \xi$-гарантированный результат первого игрока в игре Г.

Поэтому $\gamma < R(\Gamma)$. В силу произвольности γ отсюда следует неравенство $R_\kappa(\Gamma^r) \leq R(\Gamma)$. Лемма доказана.

Таким образом, для того, чтобы доказать равенство $R(\Gamma) = R_\kappa(\Gamma)$ достаточно установить одно из равенств $R(\Gamma^r) = R(\Gamma)$ или $R_\kappa(\Gamma^r) = R_\kappa(\Gamma)$. В частности, если для игры Г выполняются сформулированные в параграфе 1 предположения о непрерывности и компактности, то $U^r = U$, и потому выполняются оба равенства $R(\Gamma^r) = R(\Gamma)$ и $R_\kappa(\Gamma^r) = R_\kappa(\Gamma)$, а, значит, и равенство $R(\Gamma) = R_\kappa(\Gamma)$

3 Интерпретации

Можно предложить, как минимум, три интерпретации построенной модели.

Первая из них – методологическая. Наиболее оправданным методологически является принцип максимального гарантированного результата. И на практике он используется очень часто. Но принцип максимального гарантированного результата имеет одну не очень привлекательную сторону. Если проводить его совсем уж последовательно, то нельзя исключать возможность того, что игроку «не свалится на голову кирпич» или не произойдет еще что-то столь же неприятное. А постоянно ориентируясь на такого рода случаи, вряд ли можно принимать действительно эффективные решения.

На практике, да и в теории [6], из этой ситуации используется следующий выход. Часть совсем уж «фатальных» значений неопределенного фактора исключается из рассмотрения, а по отношению к оставшейся части используется принцип максимального гарантированного результата. На каком же основании некоторые возможности исключаются из рассмотрения? Видимо потому, что оперирующая сторона считает их «маловероятными». Такая ситуация и была формально описана выше.

Кроме описанной «методологической» интерпретации исследованная модель имеет и другую, быть может, более интересную. Величину $1 - \xi$ в данной модели, естественно, рассматривать как меру риска. Таким образом, в модели явно описываются как «доходность», оцениваемая величиной выигрыша $g(u,v)$, так и риск. Это представляется достаточно важным.

Вполне естественно предположить, что величина ξ является управлением оперирующей стороны (первого игрока), наряду с u. Здесь можно предполагать, что порядок принятия решений является следующим. Вначале первый игрок фиксирует величину ξ и стратегию u (или u_* соответственно), затем реализуется значение неопределенного фактора α, потом свое управление выбирает второй игрок. В данном случае не принципиально, получает ли второй игрок информацию о выбранном значении ξ, поскольку от него его выигрыш не зависит.

Наконец, можно предложить следующую содержательную интерпретацию тех же формальных конструкций, не апеллирующую к понятию вероятности. Предположим, первый игрок – это фирма, оказывающая какие-то услуги (банк, телефонная компания и т.п.). Имеется некоторое множество потенциальных потребителей этих услуг. Но разные потребители могут иметь несовпадающие интересы. Можно интерпретировать параметр $\alpha \in A$ как тип потребителя, считая, что интересы потребителя типа α описываются стремлением к максимизации значения функции $h(u,w,\alpha)$. Мера $\wp$ описывает распределение потребителей по типам: потребители одного типа могут встречаться чаще, потребители другого – реже.

Вполне разумной представляется следующая постановка задачи управления фирмой: требуется охватить заданную долю рынка, а от каждого своего клиента получить максимальный возможный результат. При этом вполне естественно считать, что все потенциальные потребители получают от фирмы одно и то же предложение, не зависящее от их типов. Предположение о доброжелательности в данном контексте тоже не вызывает особых возражений: если цена услуги такова, что клиенту все равно, получать ее или нет, то он предпочтет получение услуги.

4 Игра без обратной связи

Займемся вычислением величины $R(\Gamma)$ при сделанных в первом параграфе предположениях топологического характера. В этом случае, как показано выше, можно пользоваться как формулой (2), так и определением 2.

Вычисление величины $R(\Gamma)$, например, по формуле (2) предполагает вычисление точной верхней грани по классу подмножеств множества A. Регулярных методов вычисления такого супремума не существует, даже для относительно простого случая, когда множество A представляет собой отрезок. В данном параграфе мы упростим решение задачи, заменив операцию вычисления такой верхней грани операцией вычисления математического ожидания. Традиционно такая операция считается «элементарной».

Введем обозначение

$$m(u,\alpha)=\max_{v\in V} h(u,v,\alpha).$$

Пусть γ является ξ-гарантированным результатом первого игрока в игре Γ (везде далее доброжелательность второго игрока предполагается без особых оговорок). Выберем подмножество $B\subset A$ и стратегию $u\in U$, существование которых предусмотрено определением 2. Фиксируем произвольное $\alpha\in B$.

Для стратегии $w\in V$, существование которой постулируется пунктом 1° определения 2, выполняется неравенство $h(u,w,\alpha)\geq\lambda$, тем более это неравенство должно выполняться для стратегии w^0, удовлетворяющей условию $h(u,w^0,\alpha)=m(u,\alpha)$. Следовательно, число λ, фигурирующее в определении 2, должно удовлетворять условию $\lambda\leq m(u,\alpha)$.

Поэтому, если пункт 2° определения выполняется при каком-то значении λ, он тем более выполняется при $\lambda=m(u,\alpha)$. Но при таком значении λ пункт 1° тоже заведомо выполняется. Действительно, если для исходного λ выполнялось равенство $\lambda=m(u,\alpha)$, то утверждение тривиально, а если изначально было $\lambda<m(u,\alpha)$, то достаточно выбрать, например, $w=w^0$ (и тогда в силу пункта 2° определения 2 будет $g(u,v)\geq\gamma$).

Таким образом, число γ является ξ-гарантированным результатом первого игрока в игре Γ, если существуют измеримое множество $B\subset A$, мера $\wp(B)$ которого больше или равна ξ, и такая стратегия $u\in U$, что для любого $\alpha\in B$ и любого $v\in V$ либо $g(u,v)\geq\gamma$, либо $h(u,v,\alpha)\leq m(u,\alpha)$.

Итак, число γ является ξ-гарантированным результатом первого игрока в игре Γ, если существуют измеримое множество $B\subset A$, мера $\wp(B)$ которого больше или равна ξ, и такая стратегия $u\in U$, что для любого $\alpha\in B$ найдется $v\in BR(u,\alpha)$, для которого верно неравенство $g(u,v)\geq\gamma$. То же условие можно сформулировать иначе: число γ является ξ-гарантированным результатом первого игрока в игре Γ, если существуют измеримое множество $B\subset A$, мера $\wp(B)$ которого больше или равна ξ, и такая стратегия $u\in U$, что для любого $\alpha\in B$ имеет место неравенство

$$(6)\qquad \max_{v\in BR(u,\alpha)} g(u,v)\geq\gamma.$$

Рассмотрим множество

$$C(u)=\left\{\alpha\in A:\max_{v\in BR(u,\alpha)} g(u,v)\geq\gamma\right\}.$$

Докажем следующее техническое утверждение.

Лемма 3. Для любого $u\in U$ множество $C(u)$ измеримо.

Доказательство. Поскольку мера $\wp$ предполагается борелевской, достаточно доказать, что множество $C(u)$ замкнуто. Рассмотрим произвольную последовательность $\alpha_1,\alpha_2\ldots$ элементов множества $C(u)$, сходящуюся к некоторому $\alpha\in A$. Нужно показать, что $\alpha\in C(u)$.

Для каждого α_k фиксируем элемент $v_k\in BR(u,\alpha_k)$ для которого $g(u,v_k)=\max_{v\in BR(u,\alpha_k)} g(u,v)$. Поскольку $v_k\in BR(u,\alpha_k)$, выполняется условие $h(u,v_k,\alpha_k)=m(u,\alpha_k)$, а так как $\alpha_k\in C(u)$, справедливо неравенство $g(u,v_k)\geq\gamma$.

В силу компактности множества V можно, не ограничивая общности, считать, что последовательность $v_1,v_2,\ldots$ сходится к некоторому элементу v_0. Стандартным образом доказывается, что функция $m(u,\alpha)$ непрерывна. Тогда выполняется равенство $h(u,v_0,\alpha)=m(u,\alpha)$, т.е.

$v_0 \in BR(u,\alpha)$. Так как функция $g(u,v)$ непрерывна, имеет место неравенство $g(u,v_0) \geq \gamma$, и тем более $\max\limits_{v\in BR(u,\alpha)} g(u,v) \geq \gamma$, т.е. $\alpha \in C(u)$.

Лемма доказана.

Так как условие (6) выполняется для всех $\alpha \in B$, множество B должно содержаться в множестве $C(u)$, а значит, должно выполняться условие $\wp(C(u)) \geq \wp(B) \geq \xi$.

Обратно, если условие $\wp(C(u)) \geq \xi$ выполнено для некоторой стратегии u, то условие (6) будет выполнено для всех $\alpha \in B = C(u)$, и, значит γ является ξ-гарантированным результатом.

Определим функцию $\theta(x)$ условием

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \geq 0, \\ 0, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Мера множества $C(u)$ равна

$$\mathrm{M}\theta\left(\max_{v\in BR(u,\alpha)} g(u,v) - \gamma\right),$$

где символом М обозначается оператор вычисления математического ожидания по мере $\wp$.

Стандартными аналитическими рассуждениями устанавливается, что максимум

$$\max_{u\in U} \mathrm{M}\theta\left(\max_{v\in BR(u,\alpha)} g(u,v) - \gamma\right),$$

достигается.

Отсюда немедленно получается следующий результат.

Теорема 1. Для того, чтобы число γ было ξ-гарантированным результатом первого игрока в игре Г, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$(7) \qquad \max_{u\in U} \mathrm{M}\theta\left(\min_{v\in BR(u,\alpha)} g(u,v) - \gamma\right) \geq \xi .$$

Таким образом, $R(\Gamma)$ – это наибольший корень уравнения

$$\max_{u\in U} \mathrm{M}\theta\left(\min_{v\in BR(u,\alpha)} g(u,v) - \gamma\right) = \xi.$$

Теперь уже нетрудно выписать явную формулу для $R(\Gamma)$ с использованием операторов максимума и минимума, но это вряд ли интересно, поскольку ничего не меняет по существу, а при практическом вычислении только усложняет задачу.

5 Игра с обратной связью

Обратимся к вычислению максимального гарантированного результата $R(\Gamma_*)$ для наделенной дополнительной структурой игры $\Gamma_* = \langle U_*, V_*, A, g_*, h_*, \wp\rangle$, описанной в параграфе 1. Напрямую результаты предыдущего параграфа к этому случаю не применимы, поскольку не выполняются использованные там топологические предположения. В принципе, их можно было бы ослабить, и, проведя рассуждения более аккуратно, доказать утверждение, аналогичное теореме 1. Однако в аналоге формулы (7) осталась бы одна «неэлементарная» операция вычисления максимума по функциональному пространству $U_* = \Phi(V \times A, U)$. Поэтому получим независимый и более конструктивный результат. Но для этого потребуется одно дополнительное предположение.

Гипотеза 1. Функция h такова, что существует такое управление $u^p \in U$, что для любого $v \in V$ и любого $\alpha \in A$ выполняется равенство $h(u^p, v, \alpha) = \min\limits_{u\in U} h(u, v, \alpha)$.

По сути, здесь предполагается существование универсальной (не зависящей от α) стратегии наказания второго игрока первым.

Для игры Γ_* определение максимального ξ-гарантированного результата с помощью формулы (2) в общем случае не корректно, поэтому по необходимости придется пользоваться определением 2. Вновь будем использовать язык исчисления предикатов. С учетом структуры игры Γ_* определение ξ-гарантированного результата γ записывается в виде

$$(8) \quad \begin{aligned} &\exists B \exists u_* \in \Phi(V\times A, U) \forall \alpha \in B \exists \lambda : \wp(B) \geq \xi \,\&\, \left[\exists w \in V \exists \upsilon \in A : h(u_*(w,\upsilon), w, \alpha) \geq \lambda \,\&\, g(u_*(v,\beta), v) \geq \gamma\right] \& \\ &\& \left[\forall v \in V \forall \beta \in A \; g(u_*(v,\beta), v) \geq \gamma \vee h(u_*(v,\beta), v, \alpha) \leq \lambda\right]. \end{aligned}$$

Займемся ее упрощением. Как и в предыдущем разделе начнем с конкретизации значения λ. Положим

$$H(\gamma)=\{(u,v)\in U\times V: g(u,v)\geq\gamma\},$$
$$l(\alpha,\gamma)=\max_{(u,v)\in H(\gamma)} h(u,v,\alpha).$$

В содержательных терминах $H(\gamma)$ – это множество «приемлемых» для первого игрока исходов игры. Число $l(\alpha,\gamma)$ характеризует максимальный выигрыш, который может получить второй игрок, при условии, что первый тем или иным способом обеспечит себе получение «приемлемого» результата (разумеется, этот максимальный выигрыш зависит от неопределенного фактора α).

Если множество B и функция ω_* таковы, что

$$\text{(9)}\quad \begin{aligned}&\forall\alpha\in B\exists\lambda:\wp(B)\geq\xi\,\&\left[\exists w\in V\exists\upsilon\in A: h(\omega_*(w,\upsilon),w,\alpha)\geq\lambda\,\&\,g(\omega_*(v,\beta),v)\geq\gamma\right]\&\\&\&\left[\forall v\in V\forall\beta\in A\; g(\omega_*(v,\beta),v)\geq\gamma\vee h(\omega_*(v,\beta),v,\alpha)\leq\lambda\right],\end{aligned}$$

то найдется функция u_*, для которой выполнено условие

$$\text{(10)}\quad \begin{aligned}&\forall\alpha\in B\;\wp(B)\geq\xi\,\&\left[\exists w\in V\exists\upsilon\in A: h(u_*(w,\upsilon),w,\alpha)\geq l(\alpha,\gamma)\,\&\,g(u_*(v,\beta),v)\geq\gamma\right]\&\\&\&\left[\forall v\in V\forall\beta\in A\; g(u_*(v,\beta),v)\geq\gamma\vee h(u_*(v,\beta),v,\alpha)\leq l(\alpha,\gamma)\right].\end{aligned}$$

Докажем это. Пусть выполнено условие (9). Тогда множество $H(\gamma)$ не пусто. Действительно, фиксируем любое $\alpha\in B$. Тогда в силу условия (9) имеем $h(\omega_*(w,\upsilon),w,\alpha)\geq\lambda$. Значит, в силу того же условия $g(\omega_*(w,\upsilon),w)\geq\gamma$, следовательно $(\omega_*(w,\upsilon),w)\in H(\gamma)$.

Для каждого $\alpha\in A$ фиксируем пару $(u^\alpha,v^\alpha)\in H(\gamma)$ следующим образом. Если выполнено равенство $h(\omega_*(w,\upsilon),w,\alpha)=l(\alpha,\gamma)$, то положим $(u^\alpha,v^\alpha)=(\omega_*(w,\upsilon),w)$. Тогда в силу формулы (9) имеем $g(u^\alpha,v^\alpha)\geq\gamma$. Если же $h(\omega_*(w,\upsilon),w,\alpha)<l(\alpha,\gamma)$, то выберем произвольную пару (u^α,v^α), для которой $h(u^\alpha,v^\alpha,\alpha)=l(\alpha,\gamma)$. Тогда $h(u^\alpha,v^\alpha,\alpha)>\lambda$ и в силу (9) опять имеем $g(u^\alpha,v^\alpha)\geq\gamma$. Положим

$$u_*(v,\beta)=\begin{cases}u^\alpha,\ \text{если } v=v^\alpha \text{ и } \beta=\alpha,\\ \omega_*(v,\beta)\ \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Тогда для любого $\alpha\in A$ условие

$$\exists w\in V\exists\upsilon\in A: h(u_*(w,\upsilon),w,\alpha)\geq l(\alpha,\gamma)\,\&\,g(u_*(v,\beta),v)\geq\gamma$$

выполнено (можно взять $w=v^\alpha$ и $\upsilon=\alpha$). Кроме того, из неравенства $h(\omega_*(w,\upsilon),w,\alpha)\geq\lambda$ следует, что $\lambda\leq l(\alpha,\gamma)$, поэтому условие (9) влечет

$$\text{(11)}\quad g(\omega_*(v,\beta),v)\geq\gamma\vee h(\omega_*(v,\beta),v,\alpha)\leq l(\alpha,\gamma).$$

Если $\omega_*(v,\beta)\neq u_*(v,\beta)$, то по построению $g(u_*(v,\beta),v)\geq\gamma$, значит, условие

$$\text{(12)}\quad g(u_*(v,\beta),v)\geq\gamma\vee h(u_*(v,\beta),v,\alpha)\leq l(\alpha,\gamma)$$

выполнено. В противном случае условия (11) и (12) равносильны.

Таким образом, доказано, что из условия (9) следует условие (10). Обратная импликация очевидна. Поэтому условия (9) и (10) эквивалентны.

Очевидно, из условия

$$\begin{aligned}&\exists B\exists u_*\in U_*\forall\alpha\in B\;\wp(B)\geq\xi\,\&\left[\exists w\in V\exists\upsilon\in A: h(u_*(w,\upsilon),w,\alpha)\geq l(\alpha,\gamma)\,\&\,g(u_*(v,\beta),v)\geq\gamma\right]\&\\&\&\left[\forall v\in V\forall\beta\in A\; g(u_*(v,\beta),v)\geq\gamma\vee h(u_*(v,\beta),v,\alpha)\leq l(\alpha,\gamma)\right]\end{aligned}$$

следует более простое условие

$$\exists B\exists u_*\in U_*\forall\alpha\in B\;\wp(B)\geq\xi\,\&\left[\forall v\in V\forall\beta\in A\; g(u_*(v,\beta),v)\geq\gamma\vee h(u_*(v,\beta),v,\alpha)\leq l(\alpha,\gamma)\right].$$

С помощью модификации стратегии, существование которой предусмотрено последним условием, можно показать, что верна и обратная импликация. Соответствующие рассуждения практически не отличаются от приведенных выше, поэтому мы их опускаем. Таким образом, два последних условия эквивалентны, и можно работать с более простой формулой.

Поменяем в ней порядок кванторов общности:

$$\exists B\exists u_*\in U_*\;\wp(B)\geq\xi\,\&\,\forall\alpha\in B\left[\forall v\in V\forall\beta\in A\; g(u_*(v,\beta),v)\geq\gamma\vee h(u_*(v,\beta),v,\alpha)\leq l(\alpha,\gamma)\right],$$

далее

$$\exists B\ \wp(B)\geq\xi\ \&\ \exists u_*\in U_*\forall\alpha\in B\big[\forall v\in V\forall\beta\in A\ g(u_*(v,\beta),v)\geq\gamma\vee h(u_*(v,\beta),v,\alpha)\leq l(\alpha,\gamma)\big],$$

и наконец,

$$\exists B\ \wp(B)\geq\xi\ \&\ \exists u_*\in U_*\forall v\in V\forall\beta\in A\forall\alpha\in B\big[\ g(u_*(v,\beta),v)\geq\gamma\vee h(u_*(v,\beta),v,\alpha)\leq l(\alpha,\gamma)\big].$$

Теперь можно воспользоваться структурой множества стратегий первого игрока, чтобы поменять порядок кванторов существования и общности:

$$\exists B\ \wp(B)\geq\xi\ \&\ \forall v\in V\forall\beta\in A\exists u\in U\forall\alpha\in B\big[\ g(u,v)\geq\gamma\vee h(u,v,\alpha)\leq l(\alpha,\gamma)\big].$$

Переменная β в квадратных скобках «исчезла», поэтому данную формулу можно еще упростить:

$$(13)\quad \exists B\ \wp(B)\geq\xi\ \&\ \forall v\in V\exists u\in U\forall\alpha\in B\big[\ g(u,v)\geq\gamma\vee h(u,v,\alpha)\leq l(\alpha,\gamma)\big].$$

Обозначим

$$E(\gamma)=\left\{v\in V:\max_{u\in U}g(u,v)<\gamma\right\}.$$

Тогда условие (13) можно переписать в эквивалентном виде

$$\exists B:\wp(B)\geq\xi\ \&\ \forall v\in E(\gamma)\exists u\in U\forall\alpha\in Bh(u,v,\alpha)\leq l(\alpha,\gamma),$$

Теперь воспользуемся гипотезой 1, чтобы поменять порядок кванторов общности и существования:

$$\exists B:\wp(B)\geq\xi\ \&\ \forall v\in E(\gamma)\forall\alpha\in B\exists u\in U:h(u,v,\alpha)\leq l(\alpha,\gamma),$$

Еще раз поменяв порядок кванторов общности, получим

$$\exists B:\wp(B)\geq\xi\ \&\ \forall\alpha\in B\forall v\in E(\gamma)\exists u\in U:h(u,v,\alpha)\leq l(\alpha,\gamma).$$

Справедлива

Лемма 4. Множество $\alpha\in A$, для которых выполняется условие

$$\forall v\in E(\gamma)\exists u\in U:h(u,v,\alpha)\leq l(\alpha,\gamma)$$

измеримо.

Доказательство леммы мало отличается от доказательства леммы 3, поэтому здесь не приводится.

Заменяя кванторы общности и существования на операторы максимума, минимума и математического ожидания, как это делась в предыдущем разделе, получим следующий результат.

Теорема 2. Пусть гипотеза 1 верна. Тогда для того, чтобы число γ было ξ-гарантированным результатом в игре Γ_* необходимо и достаточно, чтобы

$$(14)\quad \mathrm{M}\theta\left(\inf_{v\in E(\gamma)}\max_{u\in U}\big(l(\alpha,\gamma)-h(u,v,\alpha)\big)\right)\geq\xi.$$

Если условие (14) выполнено, то построить стратегию, позволяющую получить результат γ, зная структуру формулы (14), уже несложно. Положим $B=\left\{\alpha\in A:\sup_{v\in E(\gamma)}\min_{u\in U}[h(u,v,\alpha)-l(\alpha,\gamma)]\leq 0\right\}$ (см. лемму 4). Для каждого $\alpha\in B$ фиксируем $(u_\alpha,v_\alpha)\in H(\gamma)$ так, что $h(u_\alpha,v_\alpha,\alpha)=l(\alpha,\gamma)$. Положим $u_*(v_\alpha,\alpha)=u_\alpha$. Тем самым функция u_* будет определена для части своих аргументов. Для остальных значений v и α положим $u_*(v,\alpha)=u^p$.

Доказательство того, что построенная стратегия – искомая сводится к непосредственной проверке выполнения определения 2. Стратегия u_* и множество B уже определены. Как было показано выше, при каждом $\alpha\in B$ в качестве λ можно взять число $l(\alpha,\gamma)$. Тогда первому пункту определения удовлетворяет, например, стратегия $w=v_\alpha$. Выполнение второго пункта определения следует из того, что в силу условия (14) для $\alpha\in B$ выполняется неравенство

$$\inf_{v\in E(\gamma)}\max_{u\in U}\big(l(\alpha,\gamma)-h(u,v,\alpha)\big)\geq 0.$$

Принятие гипотезы 1 с формальной точки зрения кажется довольно ограничительным, поскольку, по существу, предполагается наличие седловых точек у всех функций из некоторого параметрического семейства. Но в данном случае отказаться от этой гипотезы не получается. В этом смысле рассматриваемая в данной работе задача оказывается сложнее задачи с риск-нейтральным игроком, где от аналогичной гипотезы можно отказаться за счет введения некой «калибровочной» добавки к функции выигрыша второго игрока. Но во многих содержательных моделях ее использование представляется вполне оправданным. Скажем, если первый игрок выбирает цену, он может выбрать ее минимальной из возможных, если он выделяет партнеру ресурс, то может выделить его «по минимуму» при всех α.

Анализ приведенного доказательства показывает, что гипотезу 1 можно заменить следующим предположением.

Гипотеза 2. Существует такое управление $u \in U$, что неравенство $\max_{v\in V} h(u,v,\alpha) < l(\alpha,\gamma)$ выполняется для всех $\alpha \in A$.

Нетрудно видеть, что она слабее гипотезы 1. В качестве основной принята гипотеза 1, поскольку она проще интерпретируется.

6 Управление рисками

До сих пор величина ξ считалась параметром задачи. Математически это вполне корректно, но в рассмотренных выше интерпретациях выглядит не слишком убедительно. Гораздо естественнее считать, что оперирующая сторона (первый игрок) вправе выбирать эту величину. При этом, разумеется, следует поменять постановку задачи.

В самом деле, понятно, что чем меньше величина ξ, тем больший ξ-гарантированный результат может получить первый игрок. Поэтому естественным будет выбор $\xi = 0$, что содержательно соответствует тому, что первый игрок ориентируется на наилучшее для него значение неопределенного фактора (от меры $\wp$ в данном случае ничего не зависит).

Поэтому разумна иная постановка задачи. В одной из предложенных выше интерпретаций величина ξ может рассматриваться как мера осторожности оперирующей стороны: чем больше величина ξ, тем меньше оперирующая сторона склонна к риску. Поэтому естественно рассматривать двухкритериальную задачу с критерием γ, характеризующим «доходность» и критерием ξ, описывающим риск принимаемого решения.

Для решения этой двухкритериальной задачи многое сделано выше. Действительно, обозначим

$$F(\gamma,\xi) = \mathrm{M}\theta\Big(\inf_{v\in E(\gamma)} \max_{u\in U}\big(l(\alpha,\gamma) - h(u,v,\alpha)\big)\Big) - \xi.$$

Тогда неравенство $F(\gamma, \xi) \geq 0$ в соответствии с теоремой 2 будет описывать множество достижимых в игре Γ_* значений (γ, ξ). Дальше нужно зафиксировать способ «свертки» двух критериев. Если, например, интересоваться оптимальными по Парето решениями, то получим уже достаточно стандартную задачу: среди пар (γ, ξ), удовлетворяющих неравенству $F(\gamma, \xi) \geq 0$ выбрать оптимальные по Парето.

Сказанное с понятными изменениями относится и к игре Г.

Заключение

Предложенный выше принцип оптимальности, сочетающий теоретико-игровые идеи Штакельберга–Гермейера с теоретико-вероятностным принципом Value at Risk, представляет собой достаточно гибкое орудие моделирования конфликтов. По сути, это параметрическое семейство принципов оптимальности, включающее в себя в качестве крайних случаев классический принцип максимального гарантированного результата, соответствующий значению $\xi = 1$, и принцип поведения безнадежного оптимиста, отвечающий значению $\xi = 0$. Рассмотрение промежуточных значений ξ дает возможность описать нюансы поведения игроков, недоступные для моделирования традиционными способами.

Это позволяет решать достаточно популярные в данное время задачи управления рисками. Но, может быть, даже более интересна другая интерпретация, описанная выше. Цель «захвата» определенной доли рынка в практических задачах явно присутствует. Описанные выше конструкции доставляют инструмент для моделирования таких ситуаций.

Еще одной новеллой данного доклада является определение максимального гарантированного результата в игре с доброжелательным игроком нижнего уровня. Исторически оно восходит к Г. фон Штакельбергу. Но до недавнего времени использовался только «классический» вариант определения, который является корректным лишь при выполнении достаточно жестких ограниче6ний топологического характера, которые заведомо не выполняются, например, для игр с обратной связью.

Принцип Штакельберга имеет более узкую область применимости, чем принцип максимального гарантированного результата Ю.Б. Гермейера, поскольку само предположение доброжелательности выполняется далеко не всегда, а кроме того, трудно проверяемо. Однако можно отметить одно его существенное преимущество.

Весьма часто, решения игр Штакельберга выглядят проще, чем решения игр Гермейера (например, существуют точные решения, а не только приближенные), да и сам поиск решения оказывается проще. Это так и в рассмотренных выше задачах. Бывают, конечно, и обратные ситуации, но гораздо реже. Поэтому во многих случаях удобнее начинать исследование новой задачи с допущения доброжелательности. Отсутствие удобного определения препятствовало этому.

Литература

1. *Горелик В.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф.* Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. – М.: Радио и связь, 1991. – 287 с.
2. *Бурков В.Н., Новиков Д.А.* Теория активных систем: состояние и перспективы. – М.: Синтег, 1999. – 128 с.
3. *Bolton P., Dewatripont M.* Contract Theory. – Mass.: MIT Press, 2005. – 740 p.
4. *Dempster M.A.H. (ed.)* Risk Management. Value at Risk and Beyond. – Cambridge: Cambridge University Press, 2002. – 290 p.
5. *Горелов М.А.* Принцип «Value at Risk» в иерархической игре // Управление большими системами. Вып. 72. М.: ИПУ РАН, 2018. С. 6 - 26.
6. *Горелов М.А.* Максимальный гарантированный результат в иерархических играх // Управление большими системами. Вып. 67. М.: ИПУ РАН, 2017. С. 4 - 31.