ПРИНЦИП ОПТИМАЛЬНОСТИ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ-VAR» И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ФОНДОВОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ

Горелик В.А., Золотова Т.В.
ВЦ ФИЦ ИУ РАН
Финансовый университет при Правительстве РФ
gorelik@ccas.ru, tgold11@mail.ru

Аннотация: Предложен подход к выбору критериев оптимальности в стохастических задачах инвестирования, моделируемых в виде игр с природой с известными вероятностями состояний. Этот подход основан на совместном использовании критериев эффективности (математическое ожидание) и риска (типа VAR). Для возникающей двухкритериальной задачи в качестве способа формализации использован метод перевода одного критерия в ограничение. Рассматривается случай чистых стратегий (выбор одного варианта инвестиций) и случай смешанных стратегий (диверсификация вложения средств).

Ключевые слова: игра с природой, эффективность, риск, чистая стратегия, смешанная стратегия

Введение

В реальных процессах принятия решений в сложных системах, в частности, в задачах фондового инвестирования, лицо принимающее решение (ЛПР) действует в условиях неполной информации относительно будущего состояния системы и, следовательно, результатов своей деятельности [1]. Математическая модель подобных ситуаций называется «игрой с природой», а учет неопределенности и нейтрализация связанных с ней потерь при выборе решения называется управлением риском. Различают случаи вероятностной неопределенности, когда имеется информация о вероятностях состояния природы, и полной неопределенности, когда такой информации нет. Здесь мы рассмотрим двухкритериальный подход «эффективность – риск» для первого случая, который будем называть принятием решений в стохастических условиях. Для второго случая, который мы называем принятием решений в условиях неопределенности, аналогичный подход рассматривался в [2].

Рассмотрим ситуацию, когда ЛПР может выбирать одну из стратегий (альтернатив) $i=1,\ldots,n$, при известном наборе возможных вариантов состояний внешней среды (природы) $j=1,\ldots,m$. Выигрыш от i-го решения при j-м состоянии внешней среды есть a_{ij}. Матрица выигрышей от реализации возможных решений есть $A=\| a_{ij} \|$. Вероятности состояний природы q_j будем считать известными. ЛПР необходимо выбрать ту стратегию, которая приведет по возможности к большему выигрышу, но при этом возможные потери вследствие неполноты информации будут как можно меньше.

1 Критерии эффективности и риска

Наряду с матрицей выигрышей в играх с природой часто вводят матрицу риска, которая определяется следующим образом. Разность между выигрышем, который получает ЛПР, зная состояние внешней среды j, и выигрышем, который будет получен в ситуации, когда ЛПР выберет произвольную стратегию i, а состояние внешней среды окажется тем же j, называется риском при использовании стратегии i в условиях состояния j и обозначается r_{ij}. Матрица $R=\| r_{ij} \|$ называется матрицей риска, ее элементы $r_{ij}=\max\limits_{1\le k\le n} a_{kj}-a_{ij}\ge 0$.

В условиях неопределенности если ЛПР использует гарантированный подход к выбору решения, предполагая, что внешняя среда (природа) действует по отношению к нему наихудшим образом, то он применяет критерий Вальда $W=\max\limits_{1\le i\le n}\min\limits_{1\le j\le m} a_{ij}$.

Если ЛПР, стремясь избежать возможных потерь вследствие неполноты информации, выбирает ту стратегию (альтернативу), которая гарантирует минимальный риск, то он использует критерий Сэвиджа $S=\min\limits_{1\le i\le n}\max\limits_{1\le j\le m} r_{ij}$.

Эти критерии в общем случае дают разные оптимальные стратегии, поэтому имеет смысл подход, состоящий в их совместном использовании в условиях неопределенности (см. [2]). Однако в стохастических условиях дело обстоит иначе. Если в данном случае в качестве оценки эффективности стратегии i принять математическое ожидание выигрыша $\bar{a}_i=\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}q_j$, а в качестве оценки риска $\bar{r}_i=\sum\limits_{j=1}^{m} r_{ij}q_j$, то имеет место равенство $\bar{a}_i+\bar{r}_i=\sum\limits_{j=1}^{m}(\max\limits_{1\le i\le n} a_{ij})q_j=C$. Поэтому одна и та же стратегия максимизирует средний выигрыш и минимизирует средний риск.

Таким образом, если мы хотим применить двухкритериальный подход «эффективность – риск» при выборе решения, то оценка риска по Сэвиджу нам не подходит. При дальнейшем изложении мы будем использовать функцию VAR, которую в русском переводе можно назвать «значение при риске». Эта функция определяется как вероятность события, при котором выигрыш ЛПР не больше некоторого порогового значения, выступающего в качестве аргумента. Для определения этой функции при фиксированной чистой стратегии i надо произвести перестановку элементов в порядке роста в данной строке матрицы A и построить ступенчатую функцию распределения вероятностей. Введем обозначение для условной вероятности выигрыша не больше x при условии применении i-й чистой стратегии $P_i(x)$. При построении функции распределения для параметра x достаточно взять дискретные значения, равные элементам строки в порядке роста, а вероятность вычисляется путем суммирования q_j от индекса минимального элемента до индекса последнего не превосходящего x элемента.

Пример 1. Дана матрица выигрышей $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 16 & 1 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ и вероятности состояний природы q_1=0.5, q_2=0.25, q_3=0.25. Тогда $\bar{a}_1$=3.25, $\bar{a}_2$=5.25, $\bar{a}_3$=3.5, $P_1(2)$=0.25, $P_1(3)$=0.5, $P_1(4)$=1, $P_2(1)$=0.25, $P_2(2)$=0.75, $P_2(16)$=1, $P_3(1)$=0.5, $P_3(5)$=0.75, $P_3(7)$=1.

Если, например, для параметра x функции VAR взять значение равное 2, то $P_1(2)$=0.25, $P_2(2)$=0.75, $P_3(2)$=0.5. Если в качестве единственного критерия взять средний выигрыш, подлежащий максимизации, то оптимальна 2-я стратегия. Если в качестве единственного критерия взять вероятность выигрыша не больше 2 и его минимизировать, то оптимальна 1-я стратегия.

Таким образом, неясно на какой из этих критериев следует ориентироваться при выборе оптимальной стратегии. Хотелось бы согласно критерию математического ожидания иметь выигрыш больше в среднем, а согласно критерию VAR –поменьше вероятность неблагоприятного исхода. Особенно это очевидно, когда речь идет о вероятности отрицательного результата, т.е. потерь. Использование для выбора оптимальной стратегии только одного критерия становится недостаточным. Приходим к двухкритериальной задаче, которую необходимо каким-то способом формализовать.

2 Принцип оптимальности «среднее значение-VAR»

Рассмотрим постановку задачи двухкритериальной оптимизации, в которой один из критериев переведен в ограничение. Если в ограничении – функция VAR с параметром x и пороговым значением r_0, то получаем задачу

$$(1)\quad \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j \to \max_{i \in I}, \quad I = \{i \mid P_i(x) \le r_0\}.$$

Процедура вычисления $P_i(x)$ состоит в следующем. Обозначим через π_i перестановку элементов i-й строки в порядке роста. В результате применения перестановки $\pi_i(a_{i1},\ldots,a_{im})$ получаем строку $a_{ij_1},\ldots,a_{ij_m}$. Тогда

$$(2)\quad P_i(x) = \sum_{j=j_1}^{j_k} q_j\,,$$

где j_k определяется из условия $a_{ij_k} \le x < a_{ij_{k+1}}$. При этом считаем, что если $x < a_{ij_1}$, то $P_i(x) = 0$, а если $a_{ij_m} \le x$, то $P_i(x) = 1$.

Пусть в примере 1 при x=2 пороговое значение есть r_0=0.5, тогда ограничение в задаче (1) выполняется для стратегий 1 и 3, и решением задачи (1) является 1-я стратегия.

Рассмотрим теперь вопрос: имеет ли смысл использование смешанной стратегии при такой постановке. Ответ на этот вопрос не очевиден, т.к. при известных вероятностях состояний природы максимум математического ожидания выигрыша достигается на чистых стратегиях. Но при данном подходе ответ оказывается положительным.

Итак, общая постановка задачи имеет вид

$$(3)\quad \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i p_i \to \max_{p \in S}, \quad S = \{p \mid \sum_{i=1}^{n} p_i P_i(x) \le r_0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ p_i \ge 0,\ i = 1,\ldots,n\}.$$

В задаче линейного программирования (3) имеется два ограничения, поэтому в общем случае решение может содержать не больше двух ненулевых переменных.

Пример 2. Возьмем данные из примера 1. Тогда задача (3) примет вид

$$3.25 p_1 + 5.25 p_2 + 3.5 p_3 \to \max_p,$$

$$0.25 p_1 + 0.75 p_2 + 0.5 p_3 \le 0.5, \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1,\ p_i \ge 0,\ i = 1,2,3.$$

Решение этой задачи есть $p^0 = (0.5, 0.5, 0)$.

Если в ограничении – математическое ожидание с пороговым значением a_0, то для случая чистых стратегий получаем задачу

$$(4)\quad P_i(x) \to \min_{i \in I_1}, \quad I_1 = \{i \mid \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j \ge a_0\}.$$

Для случая смешанных стратегий соответственно имеем задачу

$$(5)\ \sum_{i=1}^{n} p_i P_i(x) \to \min_{p\in S_1}, \quad S_1 = \{ p \mid \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_i p_i \ge a_0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ p_i \ge 0,\ i = 1,\ldots,n\}$$
.

Пример 3. Пусть a_0=3.3. Тогда для данных из примера 1 при x=2 ограничения выполняются для 2-й и 3-й стратегии. Но для 3-й стратегии функция VAR принимает меньшее значение, следовательно, оптимальна 3-я стратегия. Для случая смешанных стратегий имеем задачу

$$0.25p_1 + 0.75p_2 + 0.5p_3 \to \min_{p},$$

$$3.25p_1 + 5.25p_2 + 3.5p_3 \ge 3.3, \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1,\ p_i \ge 0,\ i = 1,2,3.$$

Решение этой задачи есть $p^0 = (0.975, 0.025, 0)$.

3 Практический пример для акций российских компании

Инвесторы, принимая решение на фондовом рынке, прогнозируют будущие цены (или доходности) финансовых инструментов. В свою очередь при прогнозировании будущих доходностей можно использовать фундаментальный или технический анализ. Фундаментальный анализ основан на исследовании закономерностей, которые определяют стратегию в долгосрочной перспективе, а технический анализ предполагает исследование предыдущих значений показателей финансовых инструментов (например, доходностей) для кратковременных сделок [3].

Часто основу фундаментального анализа составляет факторная модель. Рассмотрим в качестве примера простейший случай, когда имеется один фактор (например, темп роста промышленного производства, прирост ВВП, доходности фондовых индексов). Тогда доходность актива есть $a_i = \alpha_i + \beta_i F$, где a_i – ставка доходности актива i, F – значение фактора, β_i – чувствительность актива i к фактору (коэффициент наклона), α_i – нулевой фактор (коэффициент смещения). При таком подходе в задачах (1), (3), (4), (5) каждый столбец матрицы выигрышей соответствует некоторому значению (или диапазону значений) фактора с некоторой прогнозируемой вероятностью. Тогда строки матрицы – значения доходностей для различных значений фактора. Так как значения фактора одинаковые для любого актива, то здесь мы имеем для каждой стратегии (актива) один и тот же набор состояний природы.

Технический анализ предполагает другую процедуру обработки информации. Если имеются статистические данные для каждого актива, то в матрице выигрышей каждой строке будет соответствовать набор статистических значений доходностей. Состояниями природы здесь являются моменты времени, вероятность каждого состояния есть $1/m$, где m – длина временного ряда (количество моментов времени) для каждого актива. Значения функции распределения вероятности случайного значения доходности актива i для фиксированного значения параметра x вычисляются по формуле (2). Заметим, что длина временного ряда не обязательно одинакова для каждого актива. Тогда вместо матицы имеем наборы (строки) значений доходностей активов, а вероятность каждого состояния есть $1/m_i$, где m_i – длина временного ряда для актива i.

Проведем технический анализ и найдем оптимальную стратегию инвестирования, используя реальные данные о котировках акций российских компаний за период с 01.10.2018 по 31.12.2018. За указанный период наблюдалось падение котировок большинства известных компаний. Небольшой рост имел место в секторе телекоммуникации. Поэтому были выбраны три относительно успешные компании этого сектора, а именно Мегафон, МГТС, Ростелеком. На рис. 1, 2, 3 приведены графики котировок акций этих компании за указанный период, а на рис. 4 – первые 25 значений цен закрытия акций всех рассматриваемых компаний, экспортированных в файл Excel (данные взяты с сайта Инвестиционной компании «ФИНАМ» [4]).

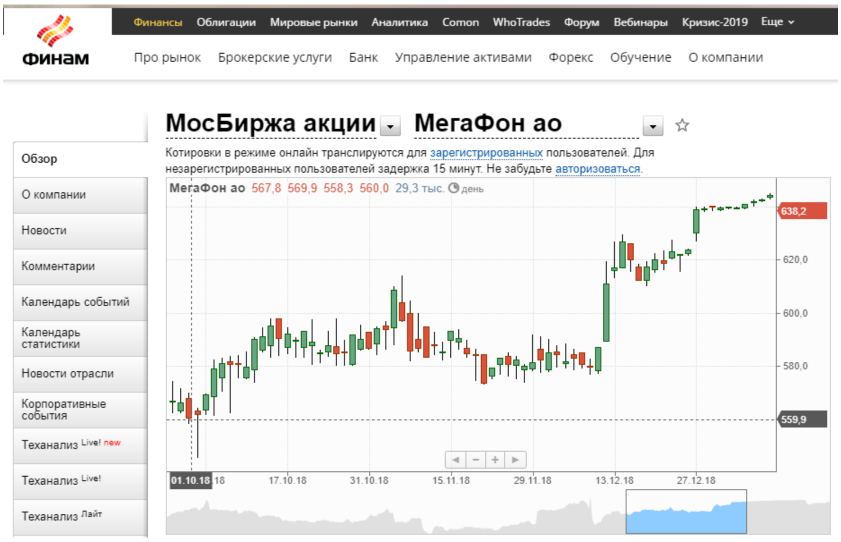

Рис. 1. Котировки акций компании Мегафон

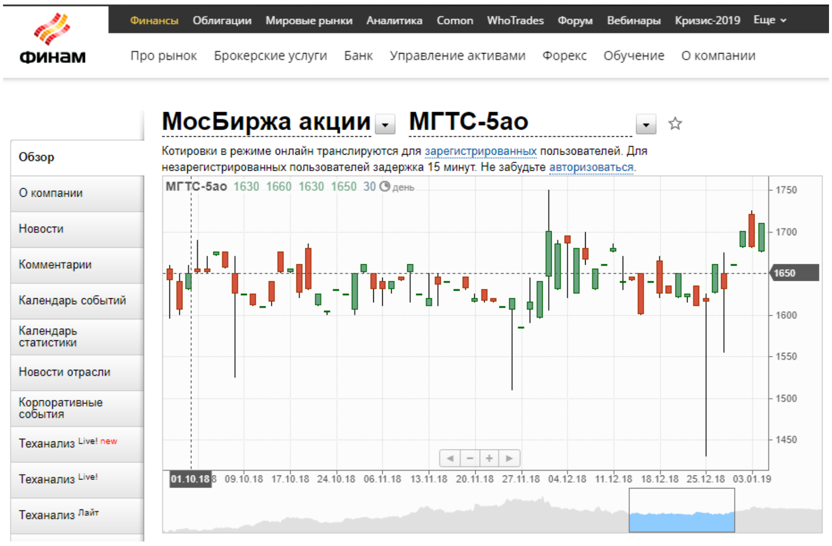

Рис. 2. Котировки акций компании МГТС

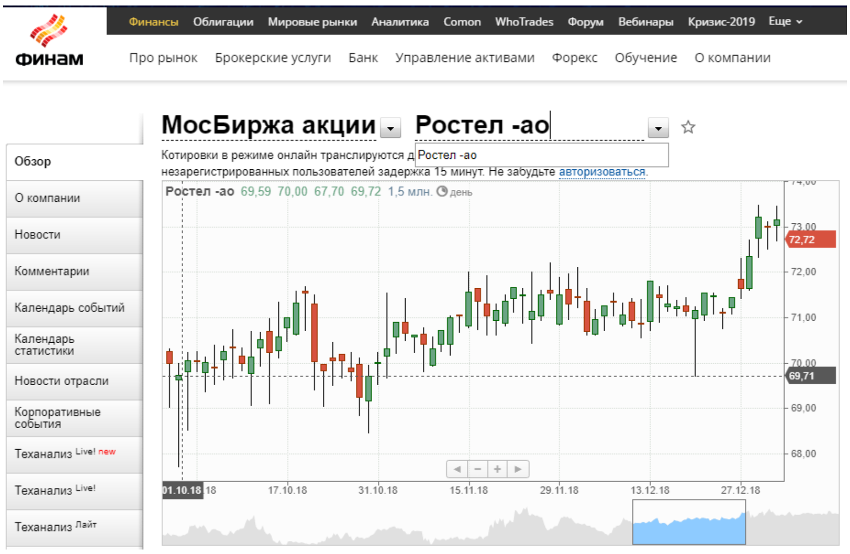

Рис. 3. Котировки акций компании Ростелеком

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	<TICKER>	<DATE>	<CLOSE>		<TICKER>	<DATE>	<CLOSE>		<TICKER>	<DATE>	<CLOSE>
2	MFON	20181001	560		MGTS	20181001	1650		RTKM	20181001	69,72
3	MFON	20181002	561		MGTS	20181002	1650		RTKM	20181002	70,05
4	MFON	20181003	569,2		MGTS	20181003	1650		RTKM	20181003	70
5	MFON	20181004	578,8		MGTS	20181004	1675		RTKM	20181004	70
6	MFON	20181005	581		MGTS	20181005	1655		RTKM	20181005	69,9
7	MFON	20181008	580		MGTS	20181008	1625		RTKM	20181008	70,24
8	MFON	20181009	580		MGTS	20181009	1625		RTKM	20181009	70,28
9	MFON	20181010	579,5		MGTS	20181010	1610		RTKM	20181010	69,95
10	MFON	20181011	590		MGTS	20181011	1610		RTKM	20181011	70,12
11	MFON	20181012	591		MGTS	20181012	1615		RTKM	20181012	70,5
12	MFON	20181015	595		MGTS	20181015	1650		RTKM	20181015	70,2
13	MFON	20181016	589,8		MGTS	20181017	1655		RTKM	20181016	70,56
14	MFON	20181017	592		MGTS	20181018	1625		RTKM	20181017	70,99
15	MFON	20181018	589,7		MGTS	20181019	1630		RTKM	20181018	71,32
16	MFON	20181019	593		MGTS	20181022	1625		RTKM	20181019	71,5
17	MFON	20181022	589		MGTS	20181023	1605		RTKM	20181022	70
18	MFON	20181023	585		MGTS	20181024	1630		RTKM	20181023	69,79
19	MFON	20181024	587,5		MGTS	20181025	1625		RTKM	20181024	70
20	MFON	20181025	584,1		MGTS	20181029	1650		RTKM	20181025	70
21	MFON	20181026	585		MGTS	20181030	1660		RTKM	20181026	69,77
22	MFON	20181029	591,6		MGTS	20181102	1630		RTKM	20181029	69,2
23	MFON	20181030	590		MGTS	20181106	1630		RTKM	20181030	69,7
24	MFON	20181031	586		MGTS	20181107	1640		RTKM	20181031	70
25	MFON	20181101	593,9		MGTS	20181108	1640		RTKM	20181101	70,3

Рис. 4. Котировки акций компаний Мегафон, МГТС, Ростелеком

На основании данных о ежедневных ценах закрытия рассчитаны ежедневные значения доходностей компаний, средние значения доходностей за данный период и статистические функции распределения вероятностей случайных значений доходностей, упорядоченных в порядке роста. Стратегия 1 – вложение в акции компании Мегафон, стратегия 2 – вложение в акции компании МГТС, стратегия 3 – вложение в акции компании Ростелеком. Временные ряды данных за указанный период имеют длины 64, 60, 64 соответственно. Средние значения доходностей при этом равны $\overline{a}_1$ =0.002138 (0.21%), $\overline{a}_2$ =0.000550 (0.055%) и $\overline{a}_3$ =0.000778 (0.078%).

A4 =СУММ(B2:B65)/64

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Мегафон	a1	N	P1(x)		МГТС	a2	N	P2(x)		Ростелек	a3	N	P3(x)	
2		-0,01972	1	0,015625			-0,02439	1	0,016667			-0,02098	1	0,015625	
3	МатОж	-0,01928	2	0,03125		МатОж	-0,02381	2	0,033333		МатОж	-0,0105	2	0,03125	
4	0,002138	-0,01766	3	0,046875		0,00055	-0,0216	3	0,05		0,000778	-0,00817	3	0,046875	
5		-0,01211	4	0,0625			-0,02108	4	0,066667			-0,00543	4	0,0625	
6		-0,01165	5	0,078125			-0,01813	5	0,083333			-0,00532	5	0,078125	
7		-0,0105	6	0,09375			-0,01813	6	0,1			-0,00503	6	0,09375	
8		-0,00874	7	0,109375			-0,01807	7	0,116667			-0,0047	7	0,109375	
9		-0,00679	8	0,125			-0,01807	8	0,133333			-0,00435	8	0,125	
10		-0,00678	9	0,140625			-0,01515	9	0,15			-0,00426	9	0,140625	
11		-0,00675	10	0,15625			-0,01231	10	0,166667			-0,00395	10	0,15625	
12		-0,00579	11	0,171875			-0,01194	11	0,183333			-0,00351	11	0,171875	
13		-0,00532	12	0,1875			-0,00923	12	0,2			-0,0034	12	0,1875	
14		-0,00512	13	0,203125			-0,00923	13	0,216667			-0,00329	13	0,203125	
15		-0,00472	14	0,21875			-0,00915	14	0,233333			-0,00321	14	0,21875	
16		-0,00429	15	0,234375			-0,00893	15	0,25			-0,00308	15	0,234375	
17		-0,00394	16	0,25			-0,00882	16	0,266667			-0,003	16	0,25	
18		-0,00389	17	0,265625			-0,00613	17	0,283333			-0,00211	17	0,265625	
19		-0,00378	18	0,28125			-0,0061	18	0,3			-0,00209	18	0,28125	
20		-0,00341	19	0,296875			-0,00601	19	0,316667			-0,00183	19	0,296875	
21		-0,00339	20	0,3125			-0,0031	20	0,333333			-0,00154	20	0,3125	
22		-0,0027	21	0,328125			-0,00309	21	0,35			-0,00143	21	0,328125	
23		-0,00205	22	0,34375			-0,00308	22	0,366667			**-0,00113**	**22**	**0,34375**	
24		-0,00193	23	0,359375			-0,00307	23	0,383333			-0,00098	23	0,359375	
25		-0,00172	24	0,375			-0,00307	24	0,4			-0,00085	24	0,375	
26		-0,00152	25	0,390625			**-0,00297**	**25**	**0,416667**			-0,00084	25	0,390625	
27		**-0,0012**	**26**	**0,40625**			0	26	0,433333			-0,00071	26	0,40625	
28		-0,00086	27	0,421875			0	27	0,45			-0,00028	27	0,421875	
29		-0,00086	28	0,4375			0	28	0,466667			-0,00014	28	0,4375	

Рис. 5. Средние значения доходностей акций, значения функции распределения

Пусть в задаче (1) x= -0.001 (-0.1%), и на основании формулы вычисления функции распределения (2) имеем P_1(-0.001) =0.406, P_2(-0.001) =0.417, P_3(-0.001) =0.344. На рис. 5 приведены средние значения доходностей выбранных компаний и отсортированные по возрастанию случайные значения доходностей до порогового значения для функции VAR, принятого равным r_0=0.41. Ограничение задачи (1) выполняется для стратегий 1 и 3, и решением в чистых стратегиях является вложение в акции компании Мегафон.

Решим задачу (3) в смешанных стратегиях при том же значении параметра x= -0.001, а пороговое значение для VAR возьмем равным r_0=0.38. Для этих данных задача имеет вид

$$0.002138\, p_1 + 0.00055\, p_2 + 0.000778\, p_3 \to \max_p,$$

$$0.406\, p_1 + 0.417\, p_2 + 0.344\, p_3 \le 0.38, \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1,\ p_i \ge 0,\ i = 1,2,3.$$

Получаем оптимальную смешанную стратегию $p^0 = (0.58, 0, 0.42)$, т.е. решением является вложение в акции компаний Мегафон и Ростелеком (рис. 6).

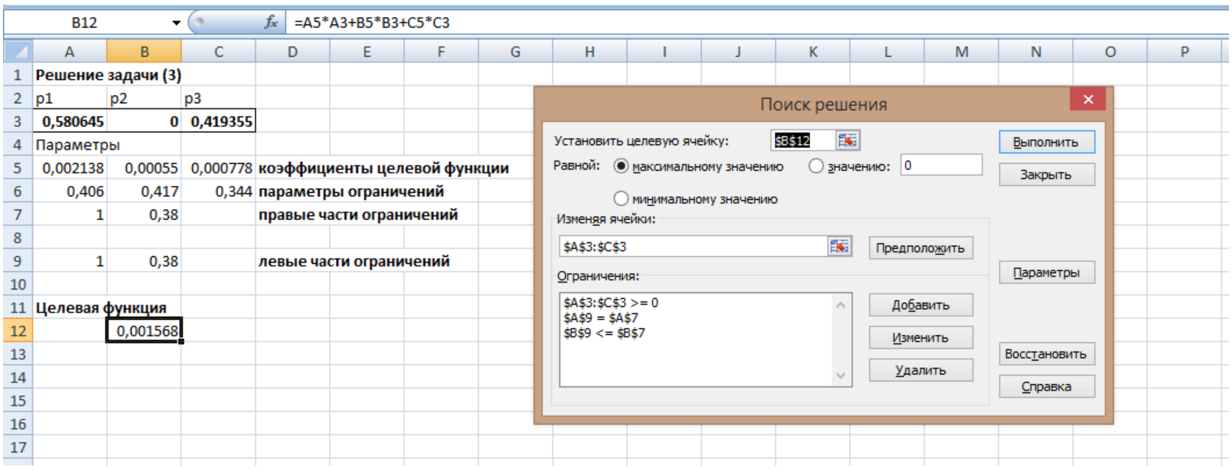

Рис. 6. Решение задачи (3)

Решим задачу (4) с математическим ожиданием в ограничении, в котором пороговое значение равно a_0=0.0007 (0.07%), а параметр минимизируемой вероятности x= -0.001. Тогда ограничение задачи выполняется для стратегий 1 и 3. Поэтому решением в чистых стратегиях является вложение в акции компании Ростелеком.

Решим задачу (5) в смешанных стратегиях при том же значении параметра x= -0.001, а пороговое среднее значение доходности возьмем равным a_0=0.001 (0.1%). Для этих данных задача имеет вид

$$0.406\, p_1 + 0.417\, p_2 + 0.344\, p_3 \to \min_p,$$

$$0.002138\, p_1 + 0.00055\, p_2 + 0.000778\, p_3 \ge 0.001, \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1,\ p_i \ge 0,\ i = 1,2,3.$$

Получаем оптимальную смешанную стратегию $p^0 = (0.16, 0, 0.84)$, т.е. решением также является вложение в акции компаний Мегафон и Ростелеком (рис. 7).

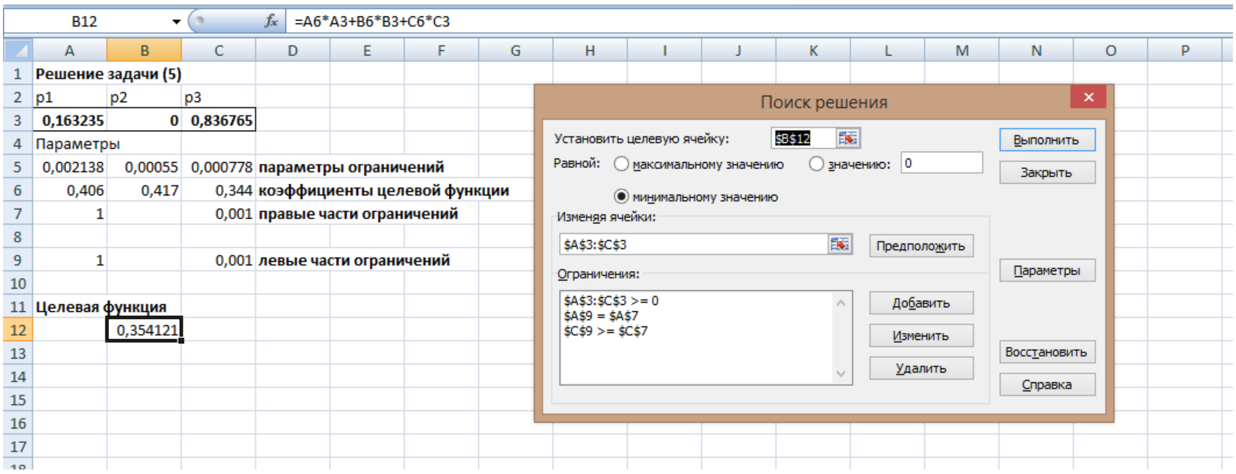

Рис. 7. Решение задачи (5)

Заключение

Понятие принципа оптимальности в задачах принятия решений в условиях неполной информации является весьма неоднозначным и индивидуальным, а модные суждения экономистов психологической школы о нерациональности поведения людей в таких ситуациях являются весьма спорными. На наш взгляд, следует идти по пути расширения спектра моделей принятия решений, основанных на рациональном поведении.

Литература

1. *Vasilyev S. and Tsvirkun A.* Problems of managing the development of large-scale systems in modern conditions, 10th International Conference Management of Large-Scale System Development, Proceedings, IEEE Conference Publications. 2017. P.1-5.
2. *Горелик В.А., Золотова Т.В.* Принципы оптимальности в задачах управления крупномасштабными системами// Управление развитием крупномасштабных систем: Труды 11 международной конференции. Том 1. – М.: ИПУ РАН. 2018. – С.252-258.
3. Шарп Уильям Ф., Александер Гордон Дж., Бэйли Джефри В. Инвестиции. – М.: ИНФРА-М. 2018. – 1028 с.
4. Инвестиционная компания «ФИНАМ», https://www.finam.ru/, период обращения 22.03.19.