МЕТОД ФОРМИРОВАНИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОГРАММ В СЕТЕВЫХ СТРУКТУРАХ

Бурков В.Н., Еналеев А.К.
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
vlab17@bk.ru, anverena@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача инвестирования средств для выполнения связанных между собой проектов и работ сложной производственной или научно-технической программы в условиях недостаточного финансирования. В этом случае часть проектов приходится исключить из программы. Описываются алгоритмы выбора оптимального набора приоритетных проектов для финансирования.

Ключевые слова: Распределение ресурса, дискретная оптимизация, задача о ранце, сетевая структура проектов.

Введение

При разработке стратегий и программ развития, а также сложных научно-технических проектов, включающих в состав фундаментальные и прикладные исследования, опытно-конструкторские работы, создание прототипов изделия и пр. обычно в силу недостатка финансовых и других ресурсов приходится решать задачу выделения наиболее приоритетных работ и определения их оптимального финансирования. Ниже для обозначения этих объектов (стратегий, программ развития, сложных проектов и др.) будем использовать термин инвестиционная программа или коротко программа, а для элементов этой программы термин – работа. Связи между отдельными проектами и работами, составляющие программу можно описать с помощью ориентированного графа без контуров. Вершинам графа приписываются работы, являющиеся претендентами для включения в программу, а дуги определяют порядок предшествования этих работ [1]. Возможно также и другое описание порядка выполнения работ с помощью графа, в котором дуги определяют некоторую предполагаемую работу для включения в программу, а вершины определяют событие завершения работы части программы. Такое описание задает последовательность упорядоченных событий. В настоящем докладе рассматривается именно такое представление программы.

Для выполнения каждой работы требуется заданное финансирование, и завершенная работа характеризуется некоторым заданным эффектом. Возникает задача оптимального размещения финансирования между работами, обеспечивающее получение максимального суммарного эффекта. Особенность рассматриваемой задачи заключается в следующем: в случае недостаточного финансирования некоторой работы она не может быть завершена, соответственно, не могут быть выполнены все последующие работы, которые зависят от результата этой работы. Это вынуждает исключить такие работы из состава инвестиционной программы.

Рассматриваемые ниже модель и метод дополняют результаты из [1,2].

1 Описание модели и постановка задачи

Рассматриваемая задача может быть описана математической моделью, сводящейся к задаче о ранце с сетевыми ограничениями (Preceding Constrained Knapsack Problem). Эта задача относится к классу NP-трудных задач [3]. Для ряда частных случаев предложены эффективные алгоритмы решения [1-3]. В докладе рассматривается еще один частный случай, допускающий эффективный алгоритм решения. При разработке предложенных алгоритмов используются подходы, разработанные в [4,5].

Пусть сетевые ограничения задаются сетью с упорядоченными событиями рис.1. В этой сети дуги соответствуют работам, а вершины событиям, причем события совершаются в очередности их номеров. Существование пути, проходящего через все события, определяет эту очередность. Последовательность упорядоченных работ (согласно [1]), обеспечивающих выполнение последующей работы, позволяет назначать номер событию.

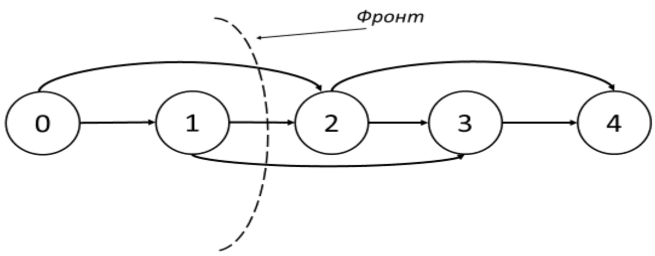

Рис. 1. Пример упорядоченных событий

Для каждой работы задана ее ценность a_{ij} и вес b_{ij} (например, величина расходов на ее выполнение). Задано также ограничение на суммарный вес (суммарный объем финансирования). Требуется определить множество выполняемых работ, такое что их суммарная ценность максимальна при ограничениях на суммарные расходы, с учетом сетевых ограничений.

Обозначим x_{ij}=1, если работа (i,j) входит в множество выполняемых работ, x_{ij}=0 в противном случае. Сетевые ограничения можно записать следующим образом:

$$(1)\quad \begin{array}{l} \text{если } x_{ij}=1, \text{ то } x_{ki}=1,\ (ki)\in V, \\ \text{если } x_{ij}=0, \text{ то } x_{jk}=0,\ (jk)\in V, \end{array}$$

где V – множество дуг сети.

Первое условие означает, что если работа (i,j) выполняется, то выполнены и все предшествующие ей работы. Второе условие означает, что если работа (i,j) не выполняется, то не могут выполняться и все следующие за ней работы.

Дадим математическую постановку задачи.

Задача. Определить $\overline{x}=\{x_{ij}:(i,j)\in V\}$, максимизирующие суммарную эффективность

$$(2)\qquad A(\overline{x})=\sum_{(i,j)\in V} a_{ij}x_{ij}$$

при ограничениях (1) и (3),

$$(3) \qquad B(\bar{x}) = \sum_{(i,j)\in V} b_{ij} x_{ij} \le B,$$

где величина B задает ограничение на суммарные расходы (фонд финансирования).

Определение 1. Фронтом работ Fs между событиями s и (s+1) называется множество работ (i,j), таких что $i \le s,\ j \ge s+1$.

На рис.1 пунктирной линией показан пример фронта работ F_1, содержащий работы (0,2), (1,2) и (1,3).

2 Метод решения

Обозначим Q_s множество работ, предшествующих событию s (для любых $(i, j) \in V$, имеет место $i \le s$). Пусть в оптимальном решении выполняются все работы множества Q_s и не выполняется хотя бы одна работа множества Q_{s+1}. В этом случае в решение задачи входят все работы фронта Q_s и некоторые работы фронта F_s. Выбор работ фронта F_s определяется из решения задачи о ранце: максимизировать

$$(4) \qquad \sum_{(i,j)\in F_s} a_{ij} x_{ij}$$

при ограничении

$$(5) \qquad \sum_{(i,j)\in F_s} b_{ij} x_{ij} \le B - \sum_{(i,j)\in Q_s} b_{ij} x_{ij} .$$

Задачу (4), (5) решаем для всех s, таких что $\sum_{(i,j)\in Q_s} b_{ij} x_{ij} \le B$.

Обозначим A_s значение (4) в оптимальном решении. Из всех решений выбираем решение с максимальной величиной A_s.

Теорема. Описанный выше алгоритм дает оптимальное решение задачи.

Доказательство. Достаточно доказать, что любое допустимое решение задачи состоит из всех работ множества Q_s и работ фронта F_s. Предположим, что найдется работа (i,j), где i>s+1. Но в этом случае должны быть выполнены все работы множества Q_i и, возможно, работы фронта F_i. Теорема доказана.

Описанный алгоритм эффективен в случае однозначного упорядочения работ, т.к. сводится к решению последовательности задач о рюкзаке малой размерности.

Этот вывод иллюстрирует следующий пример.

Пример 1. Рассмотрим структуру сети, представленную на рис. 1. Параметры модели для данного примера представлены в таблице 1.

Таблица 1. Параметры модели

(i,j)	(0,1)	(0,2)	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
a_{ij}	2	3	4	5	6	7	8
b_{ij}	1	2	3	4	2	3	4

Пусть B=13.

1 шаг. Рассмотрим событие 0. Для этого события фронт равен F_0={(0,1), (0,2)}. Так как b_{01}+b_{02}=1+2=3<13, то фиксируем ценность A_0=2+3=5 и переходим к следующему шагу.

2 шаг. Рассмотрим событие 1. В этом случае множество предшествующих работ равно Q_1=(0,1). Фронт работ равен F_1={(0,2), (1,2), (1,3)}. Так как b_{01}+b_{02}+b_{12}+b_{13}=10<13, фиксируем ценность A_1=2+5+4+5=14.

3 шаг. Рассмотрим событие 2. Имеем Q_2={(0,1), (0,2), (1,2)}, F_2={(1,3), (2,3), (2,4)}, b_{02}+b_{12}+b_{13}+b_{23}+ b_{24}=15>13.

Решаем следующую задачу о ранце: максимизировать $5x_{13} + 6x_{23} + 7x_{24}$ при ограничении $4x_{13} + 2x_{23} + 3x_{24} \le 13 - 6 = 7$.

Определим оптимальное решение этой задач о ранце: $x_{13} = 0, \quad x_{23} = 1, \quad x_{24} = 1$.

Таким образом с учетом списка предшествующих работ Q_2 получаем на третьем шаге оптимальное решение исходной задачи: $x_{01} = 1, \quad x_{02} = 1, \quad x_{12} = 1, \quad x_{23} = 1, \quad x_{24} = 1$ с суммарной ценностью 22.

В общем случае существует несколько упорядочений событий. Так для сети, изображенной на рис.2 существует три варианта упорядочений событий. Их можно представить, построив дерево различных упорядочений событий, рис. 3.

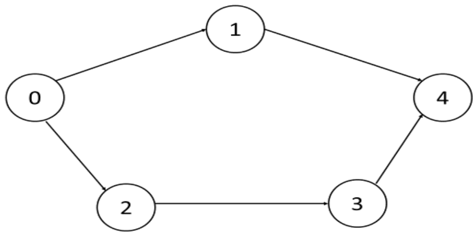

Рис. 2. Пример сети с несколькими вариантами упорядочения событий

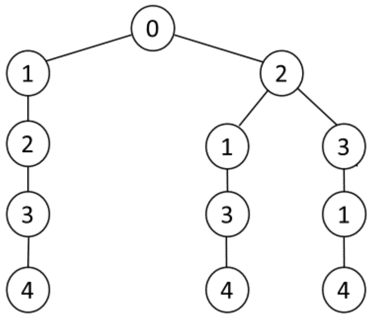

Рис. 3. Варианты упорядочения событий

Применим для решения задачи метод локальной оптимизации. Поскольку упорядочение событий задается перестановкой номеров вершин, то окрестность любого упорядочения естественно определить на основе операции транспозиции, то есть допустимой транспозиции соседних элементов перестановки. Если для сети (рис.2) взять в качестве начальной перестановки $\pi_0 = (1,2,3,4)$, то окрестность будет состоять из одной перестановки $\pi_1 = (2,1,3,4)$.

Далее в соответствии с методом локальной оптимизации решаем для этой перестановки задачу описанным выше методом. Если в окрестности есть лучшее решение, то строим его окрестность и т.д. пока не получим локально-оптимальное решение.

Пример 2. Рассмотрим сеть, представленную на рис. 2. Параметры этой сети представлены в таблице 2.

Таблица 2. Параметры модели примера 2

(i, j)	(0, 1)	(0, 2)	(1, 2)	(1, 3)	(2, 3)
a_{ij}	3	4	6	7	12
b_{ij}	6	7	4	3	10

Пусть B=20.

Решаем задачу для начальной перестановки $\pi_0 = (1,2,3,4)$.

1 шаг. Рассмотрим событие 0. Имеем Q_0=∅, F_0={(0,1), (0,2)}. Ценность A_0=7. Так как $b_{01}+b_{02}$=6+7=13<20, переходим к шагу 2.

2 шаг. Рассмотрим событие 1. Имеем Q_1=(0,1), F_1={(0,2), (1,4)}. Ценность A_0=7. Так как $b_{01}+b_{02}+b_{14}$=17<20, то ценность A_1=13. Переходим к шагу 3.

3 шаг. Рассмотрим событие 2. Имеем Q_2={(0,1), (0,2)}, F_2={(1,4), (2,3)}. Решаем задачу максимизации $6x_{14} + 5x_{13} + 7x_{23}$ при ограничении $4x_{14} + 2x_{13} + 3x_{23} \le 20 - 13 = 7$.

Оптимальное решение этой задачи о ранце равно $x_{14} = 1, \quad x_{13} = 0, \quad x_{23} = 1$. Сумарная ценность A_2 равна 20.

4 шаг. Рассмотрим событие 3. Q_3={(0,1), (0,2), (2,3)}, F_3={(1,4), (3,4)}. Поскольку $b_{01}+b_{02}+b_{23}=16<20$, то решаем задачу максимизации $6x_{14}+12x_{34}$ при ограничении $4x_{14}+10x_{34}\le 4$. Оптимальное решение этой задачи $x_{14}=1,\quad x_{34}=0$ с ценностью A_3=20.

Итак, оптимальное решение для начальной перестановки определяется шагами 3 и 4, а суммарная ценность равна $A(\pi_0)=20$.

I. Решаем задачу для соседней перестановки $\pi_1=\left(2,1,3,4\right)$.

1 шаг. Остается без изменений, A_0=7.

2 шаг. Рассматриваем событие 2. Q_2= (0,2), F_2={(0,1), (2,3)}, A_2=14.

3 шаг. Рассматриваем событие 3. Q_3={(0,1), (0,2), (2,3)}, F_3={(1,4), (3,4)}.

Аналогично шагу 3 предыдущей перестановки имеем A_3=20.

Окончательно получаем $A(\pi_1)=20$.

Перестановка π_1 имеет две соседних. Первая – это уже рассмотренная перестановка π_0. Вторая – это перестановка $\pi_2=(2,3,1,4)$.

Рассмотрим перестановку π_2.

1 шаг. Очевидно. A_0=7.

2 шаг. Рассматриваем событие 2. Q_2= (0,2), F_2={(0,1), (2,3)}, A_2=14.

3 шаг. Рассматриваем событие 3. Q_3={(0,2), (2,3)}, F_3={(0,1), (3,4)}.

Решаем задачу максимизации $3x_{01}+12x_{34}$ при ограничении $6x_{01}+10x_{34}\le 10$.

Оптимальное решение этой задачи $x_{01}=0,\quad x_{34}=1$ с ценностью A_3=23.

4 шаг. Рассматриваем событие 1. Имеем Q_2={(0,1), (0,2)}, F_2={(1,4), (2,3)}. Решение совпадает с шагом 3 начальной перестановки π_0, то есть A_4=20.

Оптимальное решение задачи определяется шагом 3, поскольку рассмотрены все упорядочения событий. При этом суммарная ценность равна A_3=23.

3 Применение метода ветвей и границ

При большом числе вершин полный перебор всех возможных упорядочений событий требует большого объема вычислений. Для направленного перебора рассмотрим метод ветвей и границ. Направленность перебора определяется на основе верхних оценок подмножеств решений.

Для получения верхних оценок рассмотрим метод, изложенный в работе [6]. В основе метода лежит понятие размерности сети. Приведем соответствующие определения, следуя работе [6]. Заметим только, что в работе [6] сеть описывается в терминах «работа-вершина». Здесь сеть описывается в терминах «работа-дуга», что требует определенной корректировки определений.

Определение 2. Множество путей покрывает сеть, если любая дуга принадлежит хотя бы одному пути.

Определение 3. Размерностью сети называется минимальное число путей, покрывающих сеть.

На рис.4 приведен пример сети, имеющий размерность 5.

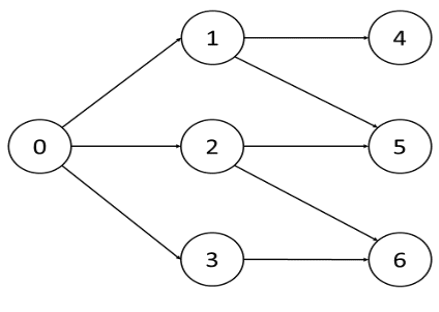

Рис. 4. Пример сети размерности 5

Пути, соответствующие размерности 5: $\mu_1=(0,1,4)$, $\mu_2=(1,5)$, $\mu_3=(0,2,5)$, $\mu_4=(2,6)$, $\mu_5=(0,3,6)$.

Для получения верхних оценок рассматриваем эти пути, как независимые. Соответствующий алгоритм описан в [6]. Поэтому рассмотрим его для сети, изображенной на рис. 4, на следующем примере.

Пример 3. Данные о проектах, связанных сетью на рис.4, приведены в следующей таблице.

Таблица 3. Параметры модели для рис.4

(i,j)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(1,4)	(1,5)	(2,5)	(2,6)	(3,6)
a_{ij}	4	5	6	9	7	8	12	10
b_{ij}	8	10	5	16	3	14	8	3

Применим метод дихотомического программирования [5]. Возьмем структуру дихотомического представления задачи в виде рис.5.

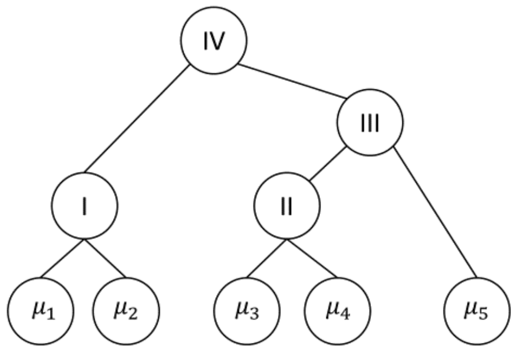

Рис. 5. Дихотомическое представление задачи

Пусть *B*=20.

Шаг 1. Рассматриваем пути μ_1 и μ_2. Решение приведено в таблице 4. В клетках таблицы первое число – эффект, а второе – затраты.

Таблица 4. Решение на шаге 1

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">μ_1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">μ_2</td><td>0</td><td>0</td><td>4;8</td></tr>
<tr><td>1</td><td>7;3</td><td>11;11</td></tr>
</table>

Сведем результаты в таблицу 5.

Таблица 5. Объединенный путь I

Вариант	0	1	2
Эффект	0	7	11
Затраты	0	3	11

Вариант (4;8) исключен, так как он доминируется вариантом (7;3).

Шаг 2. Рассматриваем пути μ_3 и μ_4. Решение приведено в таблице 6.

Таблица 6. Решение на шаге 2

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">μ_3</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">μ_4</td><td>0</td><td>0</td><td>5;10</td></tr>
<tr><td>1</td><td>12;8</td><td>17;18</td></tr>
</table>

Результаты сведены в таблицу 7.

Таблица 7. Объединенный путь II

Вариант	0	1	2
Эффект	0	12	17
Затраты	0	8	18

Шаг 3. Рассматриваем объединенный путь II и путь μ_5 . Решение приведено в таблице 8.

Таблица 8. Решение на шаге 3

		II		
		0	1	2
μ_5	0	0	12;8	17;18
	1	6;5	18;13	-
	2	16;8	28;16	-

Результаты сведены в таблицу 9.

Таблица 9. Объединенный путь III

Вариант	0	1	2	3	4
Эффект	0	6	16	18	28
Затраты	0	5	8	13	16

Шаг 4. Рассматриваем объединение путей I и IV. Решение приведено в таблице 10.

Таблица 10. Решение на шаге 4

		I		
		0	1	2
IV	0	0	7;3	11;11
	1	6;5	13;8	17;16
	2	16;8	23;11	27;19
	3	18;13	25;16	-
	4	28;16	35;19	-

Претендент на оптимальное решение определяется клеткой (35;19). Множество работ определяем методом обратного хода. Клетке (35;19) соответствует вариант 4 объединенного пути IV, и вариант 1 объединенного пути I, т.е. путь μ_2 (работа (1,5)). Варианту 4 объединенного пути IV соответствует вариант 2 пути μ_5 (т.е. работы (0,3) и (3,6)) и вариант 1 объединенного пути II, т.е. путь μ_4 или работа (2,6). Окончательно получаем, что решение входят работы (0,3), (1,5), (2,6) и (3,6). Это решение не допустимо для исходной задачи в силу нарушения условий последовательности выполнения работ, задаваемых исходной сетью. Разобьем множество всех решений на 3 подмножества. В первом событие 1 свершается первым, во втором первым свершается событие 2, а в третьем – событие 3.

Формирование оценки первого подмножества.

Шаг 1. Поскольку событие 1 свершается первым, то работа (0;1) включена в решение. Объединенный путь I принимает вид, представленный в таблице 11.

Таблица 11. Объединенный путь I

Вариант	0	1
Эффект	0	7
Затраты	0	3

Шаги 2 и 3 остаются без изменений за исключением того, что удаляются вариант 2 и объединенного пути II, и варианты 3 и 4 объединенного пути III, поскольку осталось 12 единиц ресурса.

Шаг 4. Рассматриваем объединенные пути I и III. Решение приведено в таблице 12.

Таблица 12. Решение на шаге 4

		I	
		0	1
III	0	0	7;3
	1	6;5	13;8
	2	16;8	23;11

Оптимальное решение определяется клеткой (23;11) с эффектом 23. Добавляя эффект работы (0;1) получаем оценку первого подмножества 27.

Формирование оценки второго подмножества.

Поскольку работа (0;2) выполняется, то осталось 10 единиц ресурса.

Шаг 1. Рассматриваем пути μ_1 и μ_2. Единственный вариант объединенного пути I это – (7;3).

Шаг 2. Рассматриваем пути μ_3 и μ_4. Единственный вариант объединенного пути II это – (12;8).

Шаг 3. Рассматриваем объединенный путь II и путь (0,3,6). Имеются два варианта объединенного пути III - (6;5) и (16;8).

Шаг 4. Рассматриваем объединенные пути I и III. Оптимальное решение определяется клеткой (16;8) с эффектом 16.

Добавляя эффект работе (0,2), получаем оценку второго подмножества 21.

Формирование оценки третьего подмножества.

Поскольку в оптимальном решении первой оценочной задачи работа (0,3) входит, то оценка, очевидно 35.

Выбираем третье подмножество. Разбиваем его на два подмножества. В первом упорядочение событий 0→3→1, а во втором 0→3→2.

Оценка первого подмножества. Остаток ресурса равен 7.

Объединенный путь I имеет всего один вариант – (7;3).

Объединенный путь II не имеет ни одного варианта.

Объединенный путь III имеет один вариант – (10;3).

Оптимальное решение определяется клеткой (10;3) с эффектом 10. Добавляя эффект 10 работ (0.3) и (0;1) получаем оценку 20.

Оценка второго подмножества. Остаток ресурса равен 5.

Объединенный путь I имеет один вариант – (7;3).

Объединенный путь II не имеет ни одного варианта.

Объединенный путь III имеет один вариант – (10;3).

Оценка второго подмножества 10+11=21.

Выбираем второе подмножество. В решение входят работы (0,3), (0,2), (3,6).

Выбираем подмножество (0→1) с оценкой 27. В него входят работы (0,1), (1,5), (0,3) и (3,6). Это решение является допустимым и, следовательно, оптимальным. Соответствующее дерево ветвлений приведено на рис. 6.

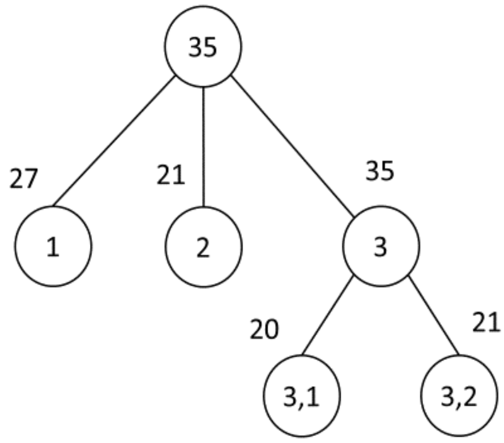

Рис. 6. Дихотомическое представление задачи

Проверим подмножество (0→1), которое также имеет оценку 27. В решение оценочной задачи входят работы (0,1), (1,5), (0,3) и (3,6), что совпадает с решением, полученным выше.

Заключение

В статье предложен подходи алгоритм решения задачи размещения ресурса, в том числе денежных средств, на выполнение комплекса работ. Связи между работами описываются сетевой структурой без контуров. Каждая работа характеризуется показателем эффекта и требуемым количеством ресурса. В условиях недостаточности ресурса на выполнение всех работ от выполнения части работ приходится отказаться. Проблема сводится к задаче о ранце в сетевой постановке. Эта задача является NP-трудной. Предложен алгоритм направленного перебора, основанный на методе ветвей и границ. Приведенные примеры показывают сложность задачи уже даже при относительно небольшом числе связанных работ. В ряде случаев возможно приближенное решение, основанное на результатах, предложенных в [1,2]. Так, например, решается задача определения основных работ-претендентов на выполнение с использованием метода «затраты-эффект» [1] (по сути, жадного алгоритма). Определяется несколько работ или блоков работ, существенно выделяющихся по показателю эффективности (отношению эффекта к требуемому ресурсу). Эти работы фиксируются, как основные, и для них выделяется ресурс. Для остальных решается задача предложенным в статье алгоритмом уже меньшей размерности с меньшим количеством работ, количеством связей между ними и, соответственно, вариантов упорядочений.

Литература

1. *Бурков В.Н., Еналеев А.К.* Обобщенная задача о ранце // Труды 11 международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD 2018)» 1-3 октября 2018, Москва, Россия, М: ИПУ РАН, Т.1. – С.117-123.
2. *Бурков В.Н., Еналеев А.К., Ходунов А.М.* Эффективный алгоритм для частного случая задачи о ранце с сетевыми ограничениями (в печати).
3. *Merer H.K., Pferschy U., Pisinger D.* Knapsack Problem. Berlin, Heidelberg: Springer–Vertlag. 2004. – 546p.
4. *Бурков В.Н., Буркова И.В., Кашенков А.Р.* Структурно-эквивалентные функции в задачах дискретной оптимизации. Проблемы управления. 2007 №1. – С.13-19.
5. *Буркова И.В.* Метод сетевого программирования в задачах нелинейной оптимизации //Автоматика и телемеханика. Т.18. 2009, №1. – С.15-21.
6. *Баркалов С.А., Бурков В.Н., Даулбаева З., Ходунов А.М..* Метод ветвей и границ в задаче о ранце с сетевыми ограничениями, Системы управления и информационные технологии (в печати).