КЛАССЫ КРИТЕРИЕВ РИСКА И ИХ ВЛИЯНИЕ НА ЭФФЕКТИВНУЮ ГРАНИЦУ МНОЖЕСТВА ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПОРТФЕЛЕЙ

Саркисов В.Г.

Самарский государственный технический университет,
Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д.244
vigen.sarkisov@mail.ru

Аннотация: Анализируется эффективная граница в задаче Марковица. В качестве критерия риска рассматривается дисперсия и несколько альтернативных показателей. Показано, что существуют классы критериев риска, порождающих одинаковые эффективные границы на множестве портфелей.

Ключевые слова: группы критериев, риск, доходность, инвестиционный портфель, инвариантность.

Классическая постановка задачи Марковица и направления её модификации

Классическая постановка задачи Марковица [1] предполагает двухкритериальную оптимизацию структуры инвестиционного портфеля $x = (x_1,..,x_N)$, где N – количество активов на рассматриваемом рынке, x_n – доля n-го актива в инвестиционном портфеле x. Требуется минимизировать значение критерия риска $V(x)$ и максимизировать значение критерия доходности $E(x)$. В классической постановке в качестве критерия доходности выбрано математическое ожидание доходности, а в качестве критерия риска – дисперсия доходности. Важным в классической постановке является предположение о нормальном распределении доходностей всех активов.

Структура портфеля удовлетворяет следующим естественным ограничениям: $\sum_{n=1}^{N} x_n = 1$ и $x_n \geq 0,\ n = 1..N$, то есть, запрещены кредитование и короткие продажи. В общем случае эти ограничения можно заменить произвольным набором ограничений вида равенств и неравенств: $\Phi_k(x) = 0,\ k = 1..K$, $\Psi_m(x) \geq 0,\ m = 1..M$, где $\Phi_k(x)$ и $\Psi_m(x)$ – линейные функции, а K и M – количество ограничений соответствующего вида.

Критика классической постановки задачи Марковица часто связана с недостаточной обоснованностью выбора дисперсии в качестве критерия риска. Многие практикующие инвесторы не ассоциируют риск с возможностью получения неожиданно высокого дохода, что породило множество модификаций формулы расчета дисперсии, в том числе, включение в формулу только значений доходности ниже её математического ожидания (полудисперсия) или только значений ниже доходности некоторого альтернативного портфеля (например, безрискового) [2, стр.20]. С одной стороны, это делает показатель риска более адекватно отражающим интуитивное восприятие риска инвесторами, а с другой – усложняет процедуру решения задачи оптимизации портфеля. Также большую популярность приобрели квантильные критерии риска. В простейшем случае в качестве критерия риска используется квантиль доходности порядка меньше 0,5 (обычно 0,1-0,3). Такой критерий описывает инвестору риск в наиболее доступной для понимания форме: "С вероятностью … убыток не превысит …". Применяются и более сложные квантильные критерии, агрегирующие сразу несколько (в том числе, бесконечно много) квантилей разных порядков [3].

Еще одно направление модификации постановки задачи Марковица связано с необходимостью более точного учета свойств доходности, которая далеко не для всех активов имеет нормальное распределение. На рис.1 приведены статистические функции распределения однодневных доходностей акций российского фондового рынка (за 2017 год).

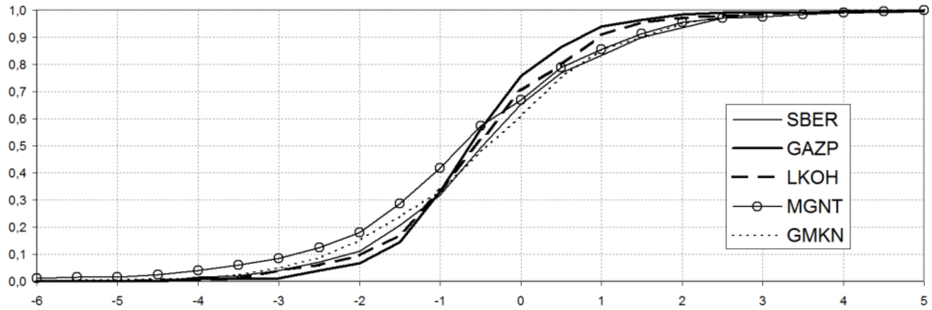

Рис. 1. Распределение однодневных доходностей акций

Доходность всех рассмотренных акций имеет нормальное распределение. Оно характерно и для других акций, облигаций, фондовых индексов и хорошо диверсифицированных портфелей на небольших сроках инвестирования. При значительном увеличении сроков распределение может становиться существенно асимметричным, в большинстве случаев коэффициент асимметрии положителен. Асимметричные распределения доходностей активов могут формироваться и из-за особенностей самого актива. Типичным примером активов с асимметричным распределением доходности являются опционы. Например, длинная позиция по европейскому call-опциону имеет дискретно-непрерывное распределение доходности (функция распределения схематично представлена на рис.2):

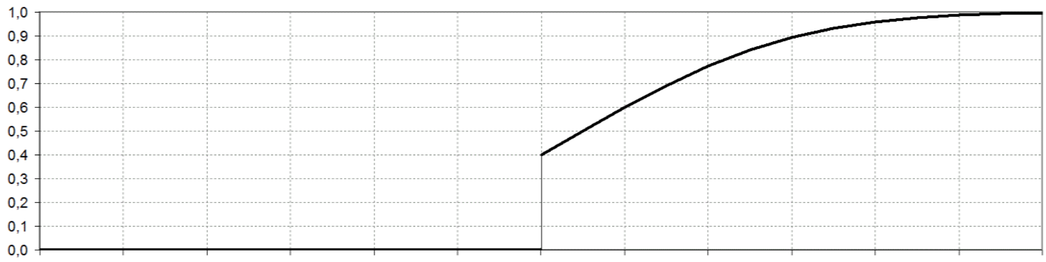

Рис. 2. Функция распределения доходности опциона (схематично)

Асимметричные дискретно-непрерывные распределения доходностей характерны также для многих опционных схем и структурных продуктов, предлагаемых клиентам инвестиционными компаниями.

Взаимозависимость критериев и эффективная граница

В качестве способа нахождения эффективной границы множества портфелей будем рассматривать многократное решение задачи однокритериальной минимизации критерия риска при различных значениях критерия доходности.

Рассмотрим частный случай, когда доходности всех активов имеют нормальное распределение. Доходность портфеля является линейной комбинацией доходностей активов и, следовательно, также распределена нормально. Так как критерий доходности (математическое ожидание доходности) при решении задачи однокритериальной оптимизации фиксируется, функция распределения доходности однозначно определяется значением дисперсии. В силу симметрии распределения, полудисперсия в точности совпадает с дисперсией. Модификации дисперсии, в которых учитываются только значения ниже некоторого порога, связаны с дисперсией строго возрастающей функциональной зависимостью (рис.3). Квантили (порядка <0,5) связаны с СКО убывающей линейной зависимостью, а с дисперсией – квадратичной. Любая линейная комбинация квантилей (с неотрицательными коэффициентами) связана с дисперсией аналогичной зависимостью.

Существование строго возрастающей (или строго убывающей) функциональной зависимости между критериями риска приводит к тому, что оптимальная структура портфеля не зависит от выбранного критерия риска. Таким образом, в случае нормально распределенных доходностей активов замена любого из перечисленных выше критериев риска дисперсией доходности не повлияет на структуру оптимального портфеля. Из этого следует, что множество портфелей будет иметь общую эффективную границу для всех перечисленных критериев.

Случай, когда все доходности портфелей являются случайными величинами, распределенными симметрично и одинаково с точностью до линейного преобразования, представляет собой обобщение предыдущего случая. Можно показать, что при равенстве математических ожиданий доходностей портфелей сохраняются все рассмотренные выше соотношения между значениями критериев риска. Следовательно, все рассмотренные критерии риска будут порождать одну и ту же эффективную границу на множестве портфелей.

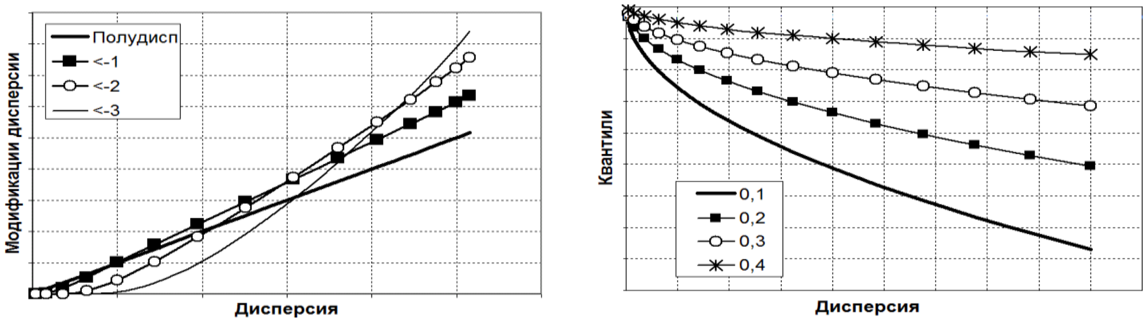

Рис. 3. Зависимость значений альтернативных критериев риска от дисперсии (схематично)

Дальнейшим обобщением является отказ от требования симметрии распределения, то есть, случай, когда *все доходности портфелей распределены одинаково с точностью до* ***линейного*** *преобразования.* Все квантили, имеющие значения меньше математического ожидания, связаны с дисперсией строго убывающей функциональной зависимостью, а все рассмотренные ранее модификации дисперсии – строго возрастающей. При их использовании эффективная граница совпадает с границей, полученной при использовании дисперсии. Квантили со значениями больше математического ожидания связаны с дисперсией уже не убывающей, а возрастающей зависимостью. То есть, возрастание риска при оценке по дисперсии будет приводить к снижению риска при оценке по таким квантилям, что существенно повлияет на структуру портфелей эффективной границы. При симметричном распределении это справедливо только при оценке по квантилям порядка больше 0,5, которые обычно не используются при оценке риска. Асимметрия распределения (отрицательный коэффициент асимметрии, длинный левый хвост распределения) может привести к тому, что некоторые из квантилей с порядком ниже 0,5 будут иметь значения выше математического ожидания.

Последующие обобщения связаны с рассмотрением доходностей портфелей, распределенных одинаково с точностью до выпуклого монотонного преобразования, до невыпуклого монотонного преобразования.

Литература

1. *Markowitz H.* Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. – New York: Wiley, 2nd ed. Cambridge, MA: Basil Blackwell, 1991
2. *Michaud Rob.O., Michaud Rich.O.* Efficient Asset Management: A Practical Guide to Stock Portfolio Optimization and Asset Allocation. – Oxford Univercity Press, 2008, 128p.
3. *Агасандян Г.А.* Финансовая инженерия и континуальный критерий VaR на рынке опционов // Экономика и математические методы, 2005. Т. 41, №4. С. 88-98.