ДИНАМИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА

Орёл Е.Н.[1], Орёл О.Е.[2]

[1]*Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации,*
Россия, г. Москва , Ленинградский просп. д.49
[2]*Московский физико-технический институт,*
Россия, Московская обл., г. Долгопрудный , ул. Институтская, д.9
enorel@fa.ru, olga_orel72@mail.ru

Аннотация: Рассматриваются системы динамической оптимизации, в которых, помимо функционала, подлежащего оптимизации, присутствуют функционалы, значения которых на реальном процессе управления должны быть ограничены. В этом случае можно считать, что заданы ограничения изопериметрического характера. Предлагается такие ограничения заменить краевыми задачами для дополнительных координат. Предложенный подход иллюстрируется численным решением изопериметрической задачи вариационного исчисления.

Ключевые слова: динамическая оптимизация, изопериметрические задачи, глобальный экстремум.

Введение

Процессы эволюции сложных управляемых систем могут описываться непрерывными, дискретными или смешанными уравнениями. При этом могут присутствовать факторы неопределённости. Поскольку события разворачиваются во времени, то необходимо следить за накоплением некоторых величин. Так, при управлении финансово-экономическими системами часто требуется максимизировать суммарную прибыль при условии, что суммарные издержки не превосходят константы. Ограничений последнего типа может быть несколько. По аналогии с вариационным исчислением будем считать такие ограничения изопериметрическими. Математически процесс накопления одной величины задаётся в виде функционала.

Учитывая сказанное, будем считать, что в задаче имеется несколько функционалов, один из которых минимизируется, а остальные должны удовлетворять заданным ограничениям. Термин «оптимизация» будем понимать в классическом смысле, когда локальные экстремумы или «стационарные точки» нас в конечном итоге не интересуют – мы стремимся к нахождению глобального (абсолютного) экстремума или его приближения. Именно это требуется в задачах экономики, робототехники, искусственного интеллекта и так далее. Поскольку на точное решение задачи оптимизации сложных систем рассчитывать не приходится, будем сразу ориентироваться на построение приближённого решения. Более подробные рассуждения на эту тему содержатся в работах [1],[2].

Для решения задач изопериметрического типа в настоящей работе предлагается заменить изопериметрические ограничения дифференциально-разностными уравнениями для дополнительных переменных. Возникнет обычная задача динамической оптимизации, в которой можно использовать математический аппарат центральных дискретных или непрерывных полей траекторий [1]-[5].

Предлагаемый подход будет проиллюстрирован на хорошо известной изопериметрической задаче вариационного исчисления.

1 Постановка задачи

Будем, для определённости, рассматривать задачу оптимального управления в обычной постановке: найти минимум функционала

(1) $([t \quad],$ $\int_t$

если заданы уравнения движения

(2) —

условия на концах траектории

(3)

и соотношения

(4)

Управление пусть принадлежит классу кусочно непрерывных вектор-функций, а функция Лагранжа $L($ и векторная функция $f(t,x,u)$, зависящие от $1+n+m$ переменных, дважды непрерывно дифференцируемы.

Кроме этого, пусть заданы изопериметрические условия

(5) $([t \quad],$ $\int_t$

где К(– -мерная дважды непрерывно дифференцируемая вектор-функция переменных.

2 Преобразование задачи

Для $t \in [t_0, t_1]$ обозначим

(6) $\int_t$

Теперь соотношение (5) можно вообще исключить из постановки задачи, считая в условиях (1)-(4), что – это бывшая пара). Ясно, что размерность пространства состояний при этом увеличилась на k единиц.

Траектория $x(.)$, обеспечивающая решение новой задачи, как известно, является экстремалью Понтрягина, то есть кривой, удовлетворяющей принципу максимума. Но, как известно, этот принцип является необходимым условием локального экстремума, а для полного решения задачи на глобальный экстремум необходимо иметь центральное поле экстремалей [1] – множество экстремалей, выходящих из стартовой точки x_0 и однократно покрывающих пространство состояний.

Такое поле в крупномасштабных и многомерных задачах построить невозможно. Возникает острая необходимость дискретизации задачи с последующим численным её решением. Надо составлять траектории из элементарных участков (тем более, что современные вычислительные средства обладают достаточно большой мощностью как по памяти, так и по быстродействию). Следует, однако, предостеречь от перехода к регулярной решётке в пространстве состояний. Такая решётка в сочетании с методом множителей Лагранжа вполне приемлема в задачах вариационного исчисления [1],[2], но в задачах оптимального управления становится весьма трудно многократно искать функции управления, переводящие систему из одной точки решётки в другую, близкую к первой.

Метод разбиения пространства состояний на классы (ячейки) [3] позволяет избежать решения подзадач нахождения маршрутов между соседними состояниями. Важным фактором является лишь то, в какую ячейку состояний попадает система. При этом фактически строится дискретное центральное поле квази-оптимальных траекторий. Более подробно метод описан в работах [1]-[5].

3 Пример: задача Дидоны

В качестве иллюстрации приведённых рассуждений рассмотрим численное решение наиболее известной задачи вариационного исчисления изопериметрического характера – задачи Дидоны. Широко известно, что круг обеспечивает максимальную площадь при заданном периметре p. Если к тому же задан прямолинейный «берег» или его часть, то решением будет круговой сегмент.

Теперь посмотрим, к чему приводит численное, приближённое решение. Будем составлять траектории из отрезков фиксированной длины l, расположенных под разными углами к оси Ox. Пусть, для простоты, элементарный шаг по углу равен $2\pi/_n$, где – целое число. Перемещая элементарные отрезки параллельно самим себе, можно получить правильный -угольник, вписанный в окружность радиуса

Как увидим ниже, если заданный фиксированный периметр равен $p = nl$, то программа построит в точности правильный -угольник. В противном же случае программа, скорее всего, не сможет вернуться в исходную точку. Поэтому последний шаг делается непосредственно в точку старта под тем углом, который получится.

Будем рассматривать плоские кривые $(x(t), y(t))$, параметризованные длиной дуги t. Тогда площадь области, ограниченной замкнутой кривой без самопересечений, вычисляется с помощью криволинейного интеграла второго рода $-\oint xd$

Значение такого интеграла на отрезке, соединяющем две заданные точки плоскости, (x_0, y_0) и y_1), равно $x_0y_1 - x_1y_0$. Таким образом, интеграл площади для ломаной Эйлера легко вычисляется.

Вычислительня программа с помощью алгоритма Дейкстры строит дискретное центральное поле ломаных Эйлера (рис. 1 слева), которое можно понимать и как дерево путей.

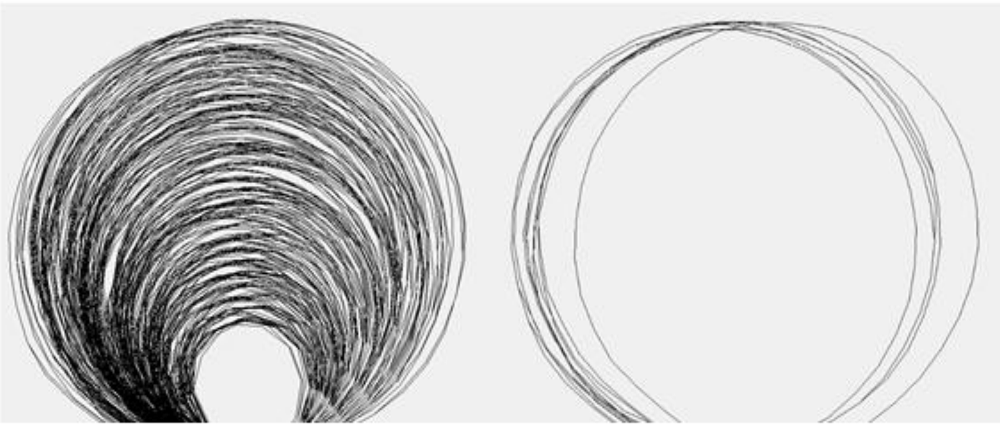

Рис..1. Дерево ломаных и его фрагмент

В программе элементарный шаг по углу равнялся $\pi/18 = 10°$. Поэтому получались равносторонние треугольники, квадраты и другие правильные многоугольники, как на рис. 2 слева. Справа на рис. 2 представлен случай, когда задан опорный отрезок, «берег моря для города Карфаген». Заметим, что пространство состояний теперь трёхмерно, поскольку третьей координатой является число пройденных ломаных.

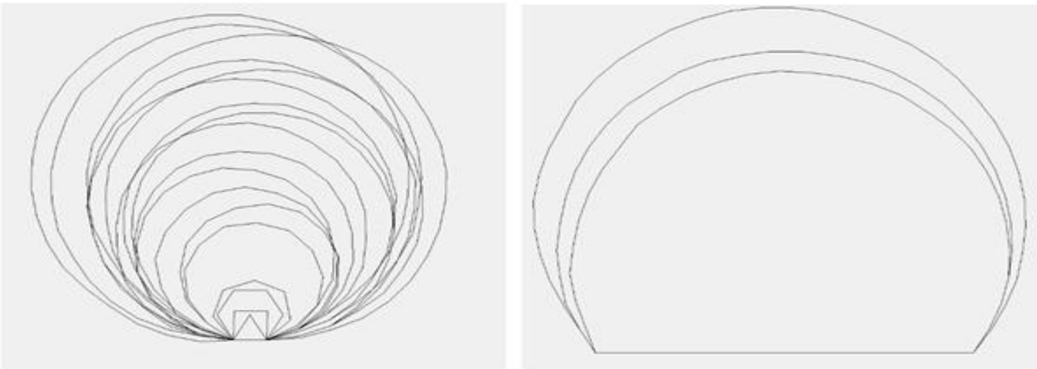

Рис. 2. Правильные многоугольники (слева) и опорный отрезок (справа внизу)

Литература

1. *Орёл Е.Н., Орёл О.Е.* Динамическая оптимизация: поиск абсолютного экстремума. – М.: Инфра-М, 2019. – 162 с.

2. *Орёл Е.Н., Орёл О.Е.* Динамическая оптимизация и кусочно постоянные функции на множестве состояний // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2019, № 1.– С.1-22.

3. *Орёл Е.Н.* Метод решения задач оптимального управления // Доклады АН СССР. 1989, Т. 306, № 6.– С.1301-1304.

4. *Орёл Е.Н., Орёл О.Е.* Центральные поля оптимальных траекторий // Доклады Академии Наук. 2014, Т. 458, № 4.– С.402-405.

5. *Орёл Е.Н., Орёл О.Е.* Оптимальное управление процессом производства при выполнении заказа к заданному сроку // Экономика и математические методы. 2016, Т. 52, № 2.– С.65-77.