

АЛГОРИТМЫ ТЕКУЩЕГО И АПОСТЕРИОРНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ ВЗРЫВНОГО ПОВЕДЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Гребенюк Е.А., Малинкина А.В.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,

Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная д.65

lgreben@ipu.ru, malinkinaav@gmail.com

Аннотация: В работе предлагаются алгоритмы обнаружения участков взрывного поведения нестационарных процессов. Рассматриваются два типа: алгоритмы обнаружения в режиме получения наблюдений и алгоритмы обнаружения по историческим данным. Эффективность алгоритмов иллюстрируется примерами обнаружения пузырей на исторических данных и результатами моделирования.

Ключевые слова: разностно-стационарные процессы, тесты на единичный корень, последовательный анализ, обнаружение и датирование пузырей, алгоритмы текущего и апостериорного обнаружения.

Введение

Большинство объектов финансового рынка и многие макроэкономические показатели являются процессами, для описания которых широко используются модели интегрированных нестационарных процессов, с дрейфом или без дрейфа. Интегрированными называются нестационарные процессы, которые после взятия конечного числа разностей описываются стационарными процессами. Такие процессы называют также разностно – стационарными или процессами с единичным корнем. Однако, в отдельные периоды, характеризующиеся бурным ростом или резким падением его значений, поведение процесса и, соответственно, его модельное описание, изменяются: процесс становится «взрывным». Ярким примером, может служить поведение цен финансовых активов при возникновении, существовании и схлопывании пузыря: в эти интервалы рост цен (а также их падение) происходит по экспоненте. Взрывное поведение не может продолжаться бесконечно долго, например, если в некоторый момент времени в разностно-стационарном процессе возникает пузырь, то процесс становится взрывным; и наоборот, при схлопывании пузыря происходит изменение свойств процесса от взрывного к разностно - стационарному или стационарному.

Алгоритмы обнаружения изменений свойств временных рядов и датирования этих изменений можно разделить на 2 класса: алгоритмы, в которых принятие решений выполняется по историческим данным, в режиме off-line и алгоритмы, в которых принятие решений осуществляется в режиме on-line, по мере поступления наблюдений. В настоящей работе рассматриваются алгоритмы, предназначенные для мониторинга нестационарных процессов выполняемого с целью обнаружения взрывного поведения процесса в режиме получения текущих наблюдений и предложен апостериорный вариант алгоритма, который может быть использован для уточнения даты возникновения пузыря после его обнаружения.

1 Алгоритмы обнаружения пузырей в режиме мониторинга

1.1 Постановка задачи

Рассмотрим процесс $y_1, y_2, \dots, y_t, \dots$, который описывается параметрической моделью вида:

$$(1) \quad \Delta y_t = \beta_t y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

где:

$$\beta_t = \begin{cases} 0, & \text{если } t = 1, 2, \dots, n \\ \frac{c}{k_t}, & \text{если } t = n + 1, n + 2, \dots, T, \end{cases}$$

$k_n \rightarrow \infty, k_t/t \rightarrow 0, c > 0$, $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}, \varepsilon_t \sim (0, \sigma^2)$ - последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин. Коэффициент β_t определяет тип нестационарности процесса: если процесс интегрированный, то $\beta_t = 0$, если процесс взрывной, то $\beta_t > 0$.

Требуется:

1) при получении очередного наблюдения $y_t, t = 1, 2, \dots$ определить, становится ли наблюдаемый процесс взрывным или остается разностно стационарным и оценить момент перехода процесса от взрывного состояния к стационарному;

2) уточнить момент t_α перехода процесса от разностно стационарного процессак взрывному, если в результате решения задачи 1) в момент времени t_α процесс определен как взрывной.

В начальный момент времени процесс описывается моделью (1), где $\beta = 0$. Схема мониторинга задается:

1) статистикой, вычисляемой по $r < m$ последним наблюдениям, которая принимает различные значения в случаях $\beta = 0$ и $\beta > 0$;

2) решающей функцией, при превышении которой заданного порога подается сигнал об изменении типа нестационарности процесса.

Порог выбирается таким образом, чтобы время, обнаружения после изменения значения β было как можно меньше при условии, что интервал между ложными обнаружениями не превышает заданной длины T .

1.2 Алгоритмы обнаружения пузырей в реальном времени

Алгоритмы обнаружения пузырей в режиме мониторинга рассматривались в работах [1-2]. Для мониторинга в [1] были предложены следующие статистики:

$$(2) \quad CUSUM: S_n^t = \frac{1}{\hat{\sigma}_t} \sum_{j=n+1}^t (y_j - y_{j-1}) = \frac{1}{\hat{\sigma}_t} (y_t - y_n),$$

$$(3) \quad FLUC: Z_t = (\hat{\beta}_t - 1) / \hat{\sigma}_{\beta_t} = DF_{t/n} \quad (t > n),$$

где $\hat{\beta}_t$ - МНК – оценка коэффициента β_t в (1) на момент времени, $\hat{\sigma}_{\beta_t}$ - оценка стандартного отклонения этой оценки, $\hat{\sigma}_t^2$ - состоятельная оценка дисперсии остатков.

В работе [3] также используется статистика (3). Однако, авторы применяют эту статистику к историческим данным, и критические значения этой статистики, при которых ошибки теста не превышают заданного уровня доверительной вероятности, зависят от объема T тестируемой выборки.

В работах [4-5] рассматривались и исследовались алгоритмы, основанные анализе логарифма отношения плотностей распределения статистики до и во время взрывного поведения процесса. В качестве статистики рассчитывался эмпирический коэффициент корреляции в окне длиной 8-10 точек между процессами $\{\Delta Y_{i,j=1}^t$ и $\{Y_{i,j=0}^{t-1}$: В качестве основной статистики в алгоритме обнаружения использовался эмпирический коэффициент корреляции. При малой длине окна распределение обоих процессов и их совместное распределение является нормальным, а процессы стационарными. Поэтому плотность распределения эмпирического коэффициента корреляции в выбранном окне может быть описана распределением Кенуэя [6]. В [4] был построен алгоритм кумулятивных сумм, предназначенный для обнаружения изменений свойств процесса от интегрированного к взрывному и от взрывного к интегрированному и датирования моментов этих изменений. В [5] было проведено исследование предложенного алгоритма методами статистического моделирования и его сравнение с алгоритмами, исследованными в работах [2-3], которое подтвердило его эффективность.

2 Алгоритмы обнаружения пузырей по историческим данным в режиме on-line

Если алгоритм мониторинга обнаружил существование пузыря, то по историческим данным мы можем уточнить дату его возникновения. Проведенные модельные эксперименты показали, что последовательное применение алгоритмов мониторинга для обнаружения факта возникновения пузыря и предлагаемого в работе для уточнения даты его возникновения апостериорного алгоритма позволяет повысить точность оценки момента возникновения пузыря. Апостериорный алгоритм включает следующие шаги:

При получении сигнала об обнаружении пузыря от алгоритма мониторинга выделяется участок выборки $[t_0, t_1]$, включающий момент t_a , в который был обнаружен пузырь, где длина каждого из сегментов $[t_0, t_a]$, $[t_a, t_1]$ больше длины окна для расчета коэффициента корреляции;

В каждой точке отрезка $[t_0 + d - 1, t_1 - d + 1]$, где d – длина окна для расчета коэффициента корреляции вычисляется статистика:

$$\Delta_1^N(j) = \ln \frac{\prod_{i=1}^{j-1} f(r_j, r_1) \prod_{i=j}^N f(r_j, r_2)}{\prod_{i=1}^N f(r_j, r_1)} = \sum_{i=j}^N [\ln f(r_j, r_2) - \ln f(r_j, r_1)]$$

где $N = t_1 - t_0 - 2d + 1$, $t = t_0 + d - 1, t_0 + d, \dots, t_1 - d$.

Оценка момента изменения свойств j получается по формуле:

$$j = \arg \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=j}^N [\ln f(r_j, r_2) - \ln f(r_j, r_1)] \right)$$

3 Результаты экспериментальной проверки алгоритмов

Для сравнения точности оценок последовательного и апостериорного алгоритмов был проведен эксперимент на ежемесячных исторических данных, собранных за период (август, 1972 г. - по апрель

2009) Рассматриваемый период включает значительное число кризисных событий, которым предшествуют рациональные «пузыри». По оценкам экономистов на рассматриваемом интервале имеется 4 пузыря. Эти данные обрабатывались последовательным и апостериорным алгоритмами, представленными выше. По результатам сравнения, апостериорный алгоритм указывает обычно более раннюю дату пузыря, чем последовательный алгоритм и оценки экономистов.

Поскольку в реальных примерах точная дата пузыря не может быть известна, то сравнение алгоритмов было дополнено результатами моделирования по Монте-Карло.

Проведенные эксперименты показали, что апостериорный алгоритм уменьшает величину среднего отклонения оценок моментов возникновения и схлопывания пузыря, полученных последовательным алгоритмом в 2 раза.

Литература

1. *Chu, C.-S. J., Stinchcombe M., and White H.* Monitoring Structural Change. *Econometrica* №64, 1996. - P. 1045–1065..
2. *Horn U., Breitung J.* Testing for Speculative Bubbles in Stock Markets: A Comparison of Alternative Methods// *Journal of Financial Econometrics*, , Vol. 10. 2012, № 1, – P. 198–231.
3. *Phillips P. C. B., Wu Y., and Yu J.* Explosive Behavior in the 1990s Nasdaq: When Did Exuberance Escalate Asset Values? // *International Economic Review*. Vol.52. 2011, № 1. – P. 201–226.
- 4 *Гребенюк Е. А., Малинкина А.В* Применение методов эконометрического анализа данных для идентификации и датирования «пузырей» на финансовых рынках// *Проблемы управления*. –2014. – N 5. – С. 50-58.
- 5 *Гребенюк Е. А., Малинкина А.В.* Сравнение методов эконометрического анализа данных для идентификации финансовых пузырей // *Проблемы управления*. –2017. – N 4. – С. 17-25.
- 6 *Kenney J.F., and Keeping E.S.* *Mathematics of Statistics*. Pt. 2. – 2nd ed. – Princeton, NJ: Van Nostrand, 1951.