О МНОГОЗНАЧНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА

Туницкий Д.В.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная д.65
dtunitsky@yahoo.com

Аннотация: Рассматриваются уравнения одномерного политропного течения сжимаемого газа с показателем адиабаты $\gamma = 3$. Для его многозначных решений найдены явные выражения.

Ключевые слова: квазилинейные уравнения, гиперболичность, многозначные решения.

При политропном течении сжимаемого газа давление p и плотность ρ связаны уравнением состояния $p = a^2\rho^\gamma/\gamma$, где γ – показатель адиабаты, и a – положительная постоянная, см. [1; гл. 2, § 1, п. 9] и [2; гл. II, § 3]. В случае плоской симметрии и показателе адиабаты $\gamma = 3$ такие течения описываются квазилинейной гиперболической системой уравнений

(1) $\rho_t + u\rho_x + a^2\rho u_x = 0,\ u_t + uu_x + a^2\rho\rho_x = 0,$

где t и x – независимые переменные, играющие роль времени и эйлеровой координаты, а $u = u(t,x)$ и $\rho = \rho(t,x)$ – неизвестные функции, играющие роль скорости и плотности, [2; гл. II, § 1].

Зададим начальные условия

(2) $u(0,x) = u_0(x),\ \rho(0,x) = \rho_0(x),$

где $-\infty < x < +\infty$. Справедлив следующий результат.

Теорема. Всякое многозначное решение задачи Коши (1), (2) можно представить в следующей параметрической форме

$$u(\xi,\eta) = \frac{r_1(\eta) + r_2(\xi)}{2}, \qquad \rho(\xi,\eta) = \frac{r_1(\eta) - r_2(\xi)}{2a},$$
$$t(\xi,\eta) = \frac{\xi - \eta}{r_1(\eta) - r_2(\xi)}, \qquad x(\xi,\eta) = \frac{\xi r_1(\eta) - \eta r_2(\xi)}{r_1(\eta) - r_2(\xi)},$$

где

$$r_1(\eta) = u_0(\eta) + a\rho_0(\eta), \qquad r_2(\xi) = u_0(\xi) - a\rho_0(\xi)$$

– это инварианты Римана, а точка (ξ,η) принадлежит области

$$W = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 \mid r_2(\xi) < r_1(\eta)\}.$$

Пример. В случае постоянной скорости $u_0(x) = u_0 = const$ инварианты Римана принимают вид

$$r_1(\eta) = u_0 + a\rho_0(\eta), \qquad r_2(\xi) = u_0 - a\rho_0(\xi),$$

область W совпадает со всей плоскостью $\mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^2$, и многозначное решение задачи Коши (1), (2) приобретает более простой вид

$$u(\xi,\eta) = u_0 + a\frac{\rho_0(\eta) - \rho_0(\xi)}{2}, \qquad \rho(\xi,\eta) = \frac{\rho_0(\eta) + \rho_0(\xi)}{2},$$

$$t(\xi,\eta) = \frac{1}{a}\frac{\xi - \eta}{\rho_0(\eta) + \rho_0(\xi)}, \qquad x(\xi,\eta) = \frac{\xi\rho_0(\eta) + \eta\rho_0(\xi)}{\rho_0(\eta) + \rho_0(\xi)}.$$

Литература

1. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М.: Наука, 1978.
2. *Черный Г. Г.* Газовая динамика. – М.: Наука, 1988.