1.

АЛГЕБРО-ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В МОДЕЛИРОВАНИИ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ СЛОЖНЫМИ СИСТЕМАМИ.

Титов А.В.

РТУ (МИИТ), ул. Образцова 9,г. Москва, Россия

a.v.titov@mail.ru

Аннотация. При моделировании задач управления сложными системами и процессами разработчики моделей сталкиваются с условиями, при которых информация об объектах моделирования неполна или противоречива. В этих условиях моделирование средствами, в основе которых лежит бинарная булева логика становятся не эффективны. В докладе рассматривается возможность формирования общей базы математического моделирования задач управления сложными системами на основе использования алгебро-логических методов исследования видов формального исчисления.

Ключевые слова**:** оценка, сложность, теория, формальный язык, модель, математическая структура, семантика, мера, отношение эквивалентности, решетка, импликативная решетка, логическое исчисление.

Введение

При моделировании как законов мышления, так и явлений окружающего мира, очевидной становится недостаточность логики с двумя значениями истинности, с законами исключенного третьего и противоречия для описания для адекватного описания сложных объектов и процессов.

Однако использование неклассических логик в задачах моделирования процессов управления не носит систематического характера, что требует выработки единой базы исследования принципов формирования неклассических логик и отношения между различными типами логики.

С этой целью рассматривается подход к изучению типов логических исчислений основанный на использовании нефинитных методов, основанных на рассмотрении оценки как морфизма сохраняющего структуру. Этот подход позволяет рассматривать множество формул алгебры логики с введенным на нем отношением эквивалентности как фактор-алгебру с определенной структурой. К ее исследованию могут быть привлечены методы теории структур, или в более общей постановке методы теории категорий, что является развитием семантического подхода к исследованию типов формальной логики на основе исследования оценки [1].

Использование такого подхода обосновано тем, что в метаматематике как теории, изучающей формализованные математические теории, т.е. множество конечных последовательностей символов (формул и термов) и множество операций над этими последовательностями используется аппарат различных разделов математики и она, тем самым, становится объектом математического исследования [2].

Связь типа формальной логики с семантикой отмечается в работах ведущих математиков:

«Принципы классической логики представлены в Set операциями на некотором множестве – двухэлементной булевой алгебре. Каждый топос имеет аналог этой алгебры, и поэтому можно сказать, что каждый топос определяет свое собственное логическое исчисление. Оказывается, что это исчисление может отличаться от классической логики, и вообще логические принципы, имеющие место в топосе, есть принципы интуиционистской логики». [3]

«В центре нашего внимания будет попытка установить связь фактического, или семантического отношения следования…с чисто формальным отношением выводимости,..»[4]

1 Логическое исчисление как алгебра формул, ее связь со структурой значений оценки.

1.1.Алгебра формул языка нулевого порядка как свободная алгебра в своем классе подобия с системой свободных образующих V_0.

Множество всех формул языка нулевого или первого порядка в классической логике является универсальной алгеброй $<Fm, \cap,\cup, \Rightarrow,-, >$ с тремя бинарными и одной унарной операцией или обобщенной алгеброй $<Fm, \cap,\cup, \Rightarrow,\bigcup,\bigcap,-, >$ с обобщенными операциями $\bigcup$, $\bigcap$**,** соответствующим кванторным приставкам.

Исходная алгебра $<Fm, \cap,\cup, \Rightarrow,-, >$ не является решеткой, т.к. для формул $f\in Fm$ и $g\in Fm$ $f\cap g\neq g\cap f$. Однако, как мы знаем, исчисление предикатов является булевой алгеброй. Встает вопрос о том в силу чего исходная алгебра формул $<Fm,\cap,\cup,\Rightarrow,-, >$ «принимает» на себя ту тли иную алгебраическую структуру.

Общепринятое определение оценки заключается в том, что под оценкой языка L_0 понимается отображение $\upsilon:V_0 \to A$, где A алгебра подобная алгебре $<Fm, \cap,\cup, \Rightarrow,-, >$, что следует, например из того, что оценка может рассматриваться как подстановка. Если при этом $<Fm, \cap,\cup, \Rightarrow,-, >$ свободная алгебра с системой образующих $V_{0,}$ то υ может быть продолжено на Fm до гомоморфизма.

В общем случае оценку можно рассматривать как морфизм, сохраняющий структуру.

Этим свойством оценки можно объяснить тот факт, что в классической пропозициональной логике множество формул является булевой алгеброй, поскольку множество значений оценки является, в этом случае двухзначной булевой алгеброй.

Таким образом, можно поставить вопрос о зависимости логического исчисления как алгебраической структуры от вида структуры значения оценки.

Принимаем Принцип **1.**_Тип логического исчисления определяется типом алгебры, на которой принимает значение оценка формул.

2.2 Нарушение «принципа» рассмотрения оценки как морфизма, сохраняющего структуру в многозначной логике..

Нарушение введенного выше принципа в пропозициональной логике приводит к нежелательным результатам, например, в известном варианте многозначной пропозициональной логики в качестве значений истинности вместо двухэлементной булевой алгебры {0,1} рассматриваются значения истинности из множества чисел $0\leq x\leq 1$, на котором не сохраняется структура булевой алгебры. В результате при $\varphi A=1/2$ имеем $\varphi(A\vee\neg A)=1/2$, что плохо согласуется с интуицией (связано с переносом интерпретаций операций как **min** и **max**, которые естественны для двухзначной логики).

«Наш основной вопрос касается возможности такого обобщения, которое допускало бы естественный (однозначный) гомоморфизм булевой алгебры «всех» высказываний на заданную алгебру значений истинности. Эта трудность становится особенно понятной, если рассматривать свойства вероятности: естественные функции (вероятностные меры) от высказываний, принимающие значения в [0,1], не являются гомоморфизмами для операций $\wedge$, v, или $\rightarrow$..» [5]

Приведенные рассуждения позволяют высказать предположение о возможности построения вариантов пропозициональной логики как алгебр гомоморфных алгебрам на которых принимает значение оценка.

2.3 Реконструкция неклассических логик со значениями оценки на импликативной решетке общего вида.

Вариант логики без законов исключенного третьего и противоречия может быть реконструирован, если в качестве семантической структуры взять решетку с двумя видами дополнения.

В частности, покажем, что такая структура эквивалентна исчислению Н-В логики.

Список аксиом Н-В логики состоит из всех формул вида [5]:

1. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ 2. $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$

3. $\beta \rightarrow \alpha \vee \beta$ 4. $(\alpha \rightarrow \gamma)\ ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma))$

5. $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$ 6. $\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$

7. $(\gamma \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \beta) \rightarrow (\gamma \rightarrow \alpha \wedge \beta))$ 8. $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma)$

9. $(\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$ 10. $\alpha \rightarrow (\beta \vee (\alpha \div \beta))$

11. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$ 12. $(\alpha \div \beta) \rightarrow \ulcorner(\alpha \rightarrow \beta)$

13. $((\alpha \div \beta) \div \gamma) \rightarrow (\alpha \div \beta \vee \gamma)$ 14. $\neg(\alpha \div \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

15.. $(\alpha \rightarrow (\gamma \div \gamma)) \rightarrow \neg\alpha$ 16. $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow (\gamma \div \gamma))$

17. $((\gamma \rightarrow \gamma) \div \alpha) \rightarrow \ulcorner\alpha$ 18. $\ulcorner\alpha \rightarrow ((\gamma \rightarrow \gamma) \div \alpha)$

Единственными правилами вывода являются modus ponens и

$(\ulcorner)\ \alpha / (\neg \ulcorner \alpha)$.

Н-В исчисление есть алгебра <A, $\cap,\cup, \rightarrow,\div,\neg, \ulcorner$, 0,1> [5].

В качестве семантической структуры, выберем структуру вида <A, $\cap,\cup, \Rightarrow,\div,-,\urcorner$, 0,1> , которую назовем Н-В – алгеброй. Это решетка, в которой для любых двух элементов существует псевдодополнение ($\Rightarrow$), и псевдоразность ($\div$). В такой решетке для каждого ее элемента a существует два вида дополнения: $\cap$-дополнение: $-a= a\Rightarrow 0$, и $\cup$-дополнение $\urcorner a= 1\div a$. В [2] показано, что $\urcorner a \geq -a$. В работе [6] показано, что аксиомы Н-В логики являются теоремами тории импликативных решеток.

3 Структуры значений оценки и определяемые ими виды логического исчисления.

Как показано в п.2.3. оценка со значением на импликативной решетке общего вида порождает логическое исчисление с двумя видами отрицания, без законов исключенного третьего для одного вида отрицания и закона отрицания для другого.

В этом случае оценка определяется следующим образом:

«Оцениванием (оценкой) в данном языке для фиксированной решетки X называется сопоставление каждой формуле ϕ элемента из X, обозначаемого $\|\phi_k\|_X$ или короче $\|\phi_k\|$, причем логические связки языка моделируются операциями в решетке X. Последнее означает, что $\|\phi\wedge\psi\| = \|\phi\| \wedge \|\psi\|$, $\|\phi\vee\psi\| = \|\phi\| \vee \|\psi\|$, $\|\phi\rightarrow\psi\| = \|\phi\| \rightarrow \|\psi\|$, $\|\neg\phi\| = \neg\|\phi\|$» [7].

При этом X, как отмечалось выше, рассматривается как импликативная решетка общего вида. Уже в этом случае, анализируя разные типы оценок, можно проследить то, как количественные изменения и сопоставляемая им мера определяют качественный тип логики, зафиксированный в системе аксиом логического исчисления, что следует из приведенного выше примера.

Другим примером может служить нестандартный анализ в его исходном варианте, в котором рассматривается множество - степень K^I, где K- структура, а формулы –суждения о свойствах данной структуры. Оценка принимает значения на P(I), выбор в качестве j ультрафильтра в P(I) позволяет заменить $Tr_j(\phi_k)$ $(Tr_j(\phi_k) \equiv \|\phi_k\| \in j)$ [7] «обычной» истинностью суждения ϕ_k о структуре K^I. Поскольку для ультрапроизведений $K^I \,|\, j \equiv K^I \,|\, \sim_j$, имеем $\phi_{k|j}([f_1], [f_2],\ldots[f_n]) \Leftrightarrow ([\phi_k(f_1, f_2,\ldots,f_n)] \in j)$, где $[f_i] \in K^I \,|\, j$. Как показано в [2] это фактор – множество содержит два элемента. Это обеспечивает эквивалентность обеих семантик.

Использование в качестве структуры значений оценки псевдобулевой алгебры, к которой приводит, например, выбор нетривиального не максимального фильтра приводит к тому, что требование выполнимости правила modus ponens, которое на языке оценок выглядит как: $\|\phi_k\|=1$, $\|\phi_k \Rightarrow \phi_k^1\|=1$ влечет $\|\phi_k^1\|=1$ (1) есть частный случай правила $\|\phi_k\| \in j$, $\|\phi_k \Rightarrow \phi_k^1\| \in j$ влечет $\|\phi_k^1\| \in j$,

(2) где j – фильтр на алгебре оценок. В modus ponens j=1. Но (2) - свойство импликативной решетки. Таким образом, modus ponens в форме (2) является правилом вывода для всех логик со значениями на импликативных решетках (псевдобулевых алгебрах).

Литература

1. *А.В.Титов.* Обобщенный нестандартный анализ и исследование форм логического исчисления на основе структур значений оценки. // Ученые записки Крымского государственного университета им. В.И. Вернадского. Серия: Философия, Культурология, Политология, Социология. - Симферополь.: Крымский федеральный университет им В.И.Вернадского, 2015. сс. [ISSN 1606-3715]

2.*Е.Рассева, Р.Сикорский*. Математика метаматематики. -М.: «Наука», 1972,- 591 с.

3. *Р.Гольдблат.* Топосы. Категорный анализ логики. М.»Мир» 1983. -470 с.

4. *Р.Линдон*. Заметки по логике. М. «Мир», 1968, - 127 с.

5. *Г. Биркгоф*. Теория решеток.- М.: «Наука», 1984, - 564 с.

6*. А.В.Титов.* Диалектика в развитии типов логических исчислений на основе структур значений оценки//Доказательство очевидность, достоверность и убедительность в математике. Труды Московского семинара по философии математики/ Под ред. В.А.Божанова, А.Н.Кричевца, В.А.Шапошникова –М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014, - 432с.

7. *В.А.Любецкий*. Оценки и пучки. О некоторых вопросах нестандартного анализа// УМН, том 44, выпуск 4(269), сс. 99-153.