ДИНАМИКИ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА-ХАКСЛИ

Кушнер А. Г.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Россия,
г. Москва, ул. Профсоюзная д.65..
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
г. Москва, Ленинские горы, 1, стр. 2,
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.,
Московский педагогический государственный университет,
Москва, ул. Малая Пироговская, 1, стр. 1.
kushner@physics.msu.ru,

Матвийчук Р. И.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
г. Москва, Ленинские горы, 1, стр. 2.
mathvich@gmail.com

Аннотация: Для эволюционных дифференциальных уравнений, обобщающих известное уравнение Бюргерса-Хаксли, построены конечномерные динамики низших порядков, позволяющие строить точные решения таких уравнений. Некоторые такие решения представлены.

Ключевые слова: конечномерные динамики, точные решения, уравнение Бюргерса-Хаксли.

При исследовании решений нелинейных эволюционных уравнений в частных производных вида

$$(1) \qquad v_t = f(v, v_x, v_{xx}, \dots)$$

часто возникает задача описания асимптотического поведении его решений при $t \to +\infty$. При этом речь может идти как о стационарных предельных режимах, так и о нестационарных.

Так, в работе [1] рассматривались вопросы стабилизации решений уравнения из теории горения. В работе [2] для квазилинейных уравнений рассматриваются примеры так называемых «промежуточных асимптотик». Это такие решения эволюционных уравнений, которые при достаточно большом значении t «забывают» начальные данные, но при этом описывают процессы, всё ещё далекие от стационарных. То есть здесь тоже можно говорить о «стабилизации» в каком-то смысле решений эволюционного уравнения. Основным методом построения таких предельных решений явился выявление автомодельных решений в виде бегущих волн, существование которых следует из наличия симметрий уравнения (1).

Основная сложность исследования асимптотического поведения решений состоит в том, что в настоящее время отсутствует сколь-нибудь общая теорема существования решений таких уравнений. Более того, существует большое число примеров, когда решения уравнений (1) определены лишь на конечных интервалах времени.

Позднее было введено понятие аттрактора для эволюционной системы [3]. В работах [4,5] предложен метод построения решений уравнений (1), основанный на так называемых конечномерных динамиках и дающий конструктивный метод построения аттракторов эволюционных уравнений.

Конечномерной динамикой k-го порядка уравнения (1) называется обыкновенное дифференциальное уравнение k-го порядка, для которого функция f, входящая в правую часть уравнения (1), является производящей функцией тасующих симметрий [6]. Зная решение этого обыкновенного дифференциального уравнения, можно построить решение уравнения (1). Для этого нужно применить к решению обыкновенного дифференциального уравнения оператор сдвига вдоль траекторий эволюционного векторного поля с производящей функцией f.

Теория конечномерных динамик является естественным развитием теории динамических систем. Её методы позволяют выделять конечномерные подмногообразия в бесконечномерном пространстве гладких функций, инвариантные относительно потока, задаваемым эволюционным уравнением. Эти подмногообразия состоят из решений обыкновенных дифференциальных уравнений и могут быть использованы для построения точных решений эволюционных уравнений даже в случае, когда уравнение не обладает достаточным запасом симметрий, а также для исследования устойчивости решений и для построения новых численных методов.

Это, во-первых, позволяет избежать вопроса о существовании решений, ибо такие подмногообразия состоят из решений обыкновенных дифференциальных уравнений, а кроме того даёт конструктивный метод для их нахождения. Функции на соответствующих пространствах джетов, задающие эти подмногообразия, используются для оценки близости между решениями и, в частности, для определения аттрактора. В работе [7] в терминах конечномерных динамик найдены достаточные условия существования аттракторов для обобщенного уравнения Рапопорта-Лиса, встречающегося в теории фильтрации.

В докладе представлены конечномерные динамики первого и второго порядков для уравнения Бюргерса-Хаксли

$$(2) \qquad v_t = vv_x + v_{xx} + F(v),$$

которые применены для нахождения новых точных решений уравнений (2) для некоторых видов функции F.

Анализ симметрий уравнений (2) бы проведён в работе [8], а в работах [9,10] построены некоторые его точные решения.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект 18-29-10013).

Литература

1. *Канель Я.И.* О стабилизации решений задачи Коши для уравнений, встречающихся в теории горения // Матем. сб. 1962. Т 59(101) (дополнительный). – С. 245-288.
2. *Баренблатт Г.И., Зельдович Я.Б.* Промежуточные асимптотики в математической физике // Успехи матем. наук. – 1971. Т. 26. №2(158). С. 115-129.
3. *Бабин А.В. , Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности. Успехи матем. наук. – 1983. Т 38. № 4(232). С. 133-187.
4. *Kruglikov B.S., Lychagina O.V.* Finite dimensional dynamics for Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov equation // Lobachevskii Journal of Mathematics – 2005. Vol. 19. – P. 13-28.
5. *Lychagin V., Lychagina O.* Finite Dimensional Dynamics for Evolutionary Equations // Nonlinear Dynamics. – 2007. – Vol. 48. – P. 29-48.
6. *Kushner A. G., Lychagin V. V., Rubtsov V. N.* Contact Geometry and Nonlinear Differential Equations. – Cambridge University Press. – 2007. – 518 p.
7. *Ахметзянов А.В., Кушнер А.Г., Лычагин В.В.* Аттракторы в моделях фильтрации // Доклады акад. наук. 2017. Т. 472. № 6. – С. 627-630.
8. *Aksenov A.V., Druzhkov K.P.* Symmetries and reductions of Burgers-Huxley equation // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – Vol. 788. – P. 1-6.
9. *Nourazar S.S., Soori M. and Nazari-Golshan A.* On the Exact Solution of Burgers-Huxley Equation Using the Homotopy Perturbation Method // Journal of Applied Mathematics and Physics. 2015. № 3. P. 285-294.
10. *Zemlyanukhin A. I., Bochkarev A. V.* Exact solitary-wave solutions of the Burgers-Huxley and Bradley-Harper equations // Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform., 2017, Vol. 17. Iss.1. P. 62-70.