ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА

Кушнер А.Г.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Россия,
г. Москва, ул. Профсоюзная д.65
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Московский педагогический государственный университет
kushner@physics.msu.ru,

Кушнер Е.Н.

Московский государственный технический университет гражданской авиации,
г. Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20
ekushner@ro.ru,

Самохин А.В.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Россия,
г. Москва, ул. Профсоюзная д.65
samohinalexey@gmail.com

Аннотация: Для эволюционных уравнений третьего порядка по пространственной переменной построена алгебра дифференциальных инвариантов относительно псевдогруппы точечных преобразований. Подобные уравнения возникают при изучении процессов фильтрации (уравнение Рапопорта-Лиса), теории нелинейных волн (уравнение Кортевега – де Фриза).

Ключевые слова: джеты, алгебра дифференциальных инвариантов, точечные преобразования.

В докладе представлено поле рациональных дифференциальных инвариантов псевдогруппы точечных пребразований для эволюционного дифференциального уравнения вида

(1) $$u_t = A(u)_x + B(u)_{xx} + C(u)_{xxx}\ ,$$

где $u = u(t,x)$, а A, B, C – функции класса C^∞ с общей областью определения.

Для его построения среди всех точечных преобразований выделяются допустимые преобразования, т.е. такие, которые сохраняют класс уравнений вида (1). Допустимые преобразования образуют группу Ли, а её дифференциальные инварианты являются также и дифференциальными инвариантами уравнений.

Уравнения (1) описывают широкий класс нелинейных процессов.

Например, при $C = 0$ уравнения (1) возникают в теории нелинейной фильтрации [1,2] и называются обобщенными уравнениями Рапопорта-Лиса. В работе [3] были построены конечномерные динамики и аттракторы таких уравнений, а в работе [4] найдены дифференциальные инварианты алгебры Ли допустимых преобразований.

При $A(u) = -3u^2,\ \ B(u) = 0,\ C(u) = -1$ получаем уравнение Кортевега – де Фриза [5]

(2) $$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0,$$

а при $A(u) = -3u^2,\ \ B(u) = \mu,\ C(u) = -1$ – уравнение Кортевега – де Фриза с диссипацией

(3) $$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = \mu u_{xx}.$$

Поэтому уравнения вида (1) при выполнении условия $C \neq 0$ будем называть обобщенными уравнениями Кортевега – де Фриза.

Уравнение (1) запишем в виде

$$u_t = A'(u)u_x + B'(u)u_{xx} + B''(u)u_x^2 + C'(u)u_{xxx} + 3C''(u)u_x u_{xx} + C'''(u)u_x^3$$

или, вводя обозначения $a(u) = A'(u),\ b(u) = B'(u),\ c(u) = C'(u)$, в виде

$$(4) \quad u_t = a(u)u_x + b(u)u_{xx} + b'(u)u_x^2 + c(u)u_{xxx} + 3c'(u)u_x u_{xx} + c''(u)u_x^3 .$$

Таким образом, уравнение (4) однозначно определяется тремя функциями a, b, c одной переменной u и поэтому его можно рассматривать как заданную параметрически кривую в пространстве $\mathbf{R}^3$ с координатами a, b, c.

Лемма 1. Допустимые инфинитезимальные точечные преобразования уравнения (4) образуют группу Ли G, алгебра Ли которой порождена векторными полями $\partial_t, \partial_x, \partial_u, 3t\partial_t + x\partial_x, x\partial_x, t\partial_x, u\partial_u$.

Введем пространство $\mathbf{R}^4$ с координатами u, a_0, b_0, c_0 и рассмотрим тривиальное векторное расслоение $\pi: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$, где $\pi(u, a_0, b_0, c_0) = u$. Класс уравнений вида (4) ассоциируем с сечениями этого расслоения.

Пусть $J^k(\pi)$ – пространство -джетов сечений расслоения π и $u, a_0, b_0, c_0, \dots, a_k, b_k, c_k$ – канонические координаты на нём.

Лемма 2. Действие группы Ли G на пространстве $J^0(\pi)$ порождено векторными полями

$$\partial_u, u\partial_u, \partial_{a_0}, 2a_0\partial_{a_0} + b_0\partial_{b_0}, a_0\partial_{a_0} + 2b_0\partial_{b_0} + 3c_0\partial_{c_0}.$$

Продолжая эти векторные поля в пространство джетов $J^k(\pi)$, найдем поле рациональных дифференциальных инвариантов уравнения (4). А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема. Поле рациональных дифференциальных инвариантов обобщенных уравнений Кортевега – де Фриза относительно *точечных преобразований порождено инвариантами*

$$J_{1,i} = \frac{b_i b_0^{2i-1}}{a_1^i c_0^i},\ J_{2,i} = \frac{c_i b_0^{2i}}{c_0^{i+1} a_1^i},\ J_{3,i} = \frac{a_{i+1} b_0^{2i}}{c_0^i a_1^{i+1}}, \text{ где } i = 1,2,3, \dots.$$

Согласно теореме Ли-Трессе [6], построенные дифференциальные инварианты позволяют классифицировать регулярные обобщенные уравнения Кортевега – де Фриза относительно точечных преобразований.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект 18-29-10013).

Литература

1. *Баренблатт Г.И.* Нелинейная фильтрация: прошлое, настоящее и будущее // В сборнике «Проблемы теории фильтрации и механика процессов повышения нефтеотдачи». – М.: Наука, 1987 – С. 15-27.
2. *Rapoport L., Leas W.* Properties of linear waterflood // AIME Trans. 1953. Vol. 198. – P.139-148.
3. *Ахметзянов А.В., Кушнер А.Г., Лычагин В.В.* Аттракторы в моделях фильтрации // Доклады акад. наук. 2017. Т. 472. № 6. – С. 627-630.
4. *Kushner E.N.* Classification of generalized Rapoport–Leas equations // Proceedings of 2018 Eleventh International Conference «Management of Large-Scale System Development» (MLSD) Russia, Moscow, V.A. Trapeznikov Institute Of Control Sciences, October 1-3, 2018.
5. *D. J. Korteweg, G. de Vries*. On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves // Philosophical Magazine. 1895. Vol. 39. – P. 422-443.
6. *Kruglikov B., Lychagin V.* Global Lie–Tresse theorem. Sel. Math. New Ser. (2016) 22: 1357.