РЕЛЕЙНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕВЕРНУТЫМ МАЯТНИКОМ НА ПОДВИЖНОЙ ТЕЛЕЖКЕ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИЯ СИЛЫ СУХОГО ТРЕНИЯ

Кочетков С.А.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,

Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная д.65

kos@ipu.ru

Аннотация: В работе рассматривается задача управления перевернутым маятником, закрепленным на подвижном основании (тележке), которое с помощью двигателя постоянного тока может быть горизонтально перемещена по направляющей. Отличительной особенностью конструкции является наличие роликов, с помощью которых основание прижимается к направляющей, что обуславливает наличие существенной силы трения между тележкой и рельсом. В описанных условиях ставится задача стабилизации маятника в верхнем положении с одновременным регулированием положения тележки. Для компенсации силы сухого трения в статье разработан новый разрывный закон управления, с помощью которого удается обеспечить решение поставленной проблемы с заданной точностью.

Ключевые слова: перевернутый маятник, сухое трение, разрывный закон управления.

Введение

В статье рассматривается перевернутый маятник, закрепленный на подвижном основании. В качестве исполнительного устройства, приводящего в движении тележку используется двигатель постоянного тока с возбуждением от постоянных магнитов. Сила сухого трения между подвижной тележкой, перемещающейся по рельсе, может регулироваться за счет поджатия роликов, входящих в состав крепления. Подобная конструкция широко применяется в технике для компенсации люфтов подвижных механизмов. Наличие существенного возмущения не позволяет использовать при синтезе законов стабилизации верхнего положения маятника классические линейные алгоритмы на основе ПИД-регуляторов, т.к. при достаточно малых отклонениях управляющее воздействие подавляется нелинейной силой трения. Использование наблюдателей возмущений затруднено в силу достаточно малых скоростей движений, что делает задачу оценивания возмущения плохо обусловленной. В статье предложен закон управления, позволяющий избежать указанных трудностей.

Для дальнейшего изложения введем обозначения, приведенные в таблице 1. Математическая модель электромеханической системы может быть записана с использованием уравнений Кирхфгофа и уравнений Лагранжа второго рода [1, 2]

$$
\begin{aligned}
&\dot{\varphi} = \omega, \qquad \dot{x} = v,\\
&\dot{\omega} = \frac{M_{\text{eq}}\left[-\mu_p\omega + mgl\sin(\varphi)\right]}{\Delta(\varphi)} + \frac{ml\cos(\varphi)\left[-ml\sin(\varphi)\omega^2 - \mu_{bd}N\operatorname{sign}(v) - \mu_{b\text{eq}}v + \frac{c_i}{r_s}I\right]}{\Delta(\varphi)},\\
&\dot{v} = \frac{ml\cos(\varphi)\left[-\mu_p\omega + mgl\sin(\varphi)\right]}{\Delta(\varphi)} + \frac{J_{\text{eq}}\left[-ml\sin(\varphi)\omega^2 - \mu_{bd}N\operatorname{sign}(v) - \mu_{b\text{eq}}v + \frac{c_i}{r_s}I\right]}{\Delta(\varphi)},\\
&\dot{I} = -\frac{R}{L}I - \frac{c_\omega}{Lr_s}v + \frac{u}{L},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где φ – угловое положение стержня, ω – угловая скорость маятника, J – момент инерции маятника, l – расстояние до центра масс маятника, m – масса маятника, M – масса подвижного основания, x – координата центра масс подвижного основания, v – скорость центра масс подвижного основания, μ_{bd} – коэффициент сухого трения между подвижным основанием и рельсом, μ_{bv} – коэффициент вязкого трения между подвижным основанием, и рельсом, μ_p – коэффициент вязкого трения в подшипнике маятника, μ_d – коэффициент вязкого трения в подшипнике электродвигателя R – сопротивление якоря электродвигателя, L – индуктивность якоря электродвигателя, c_i – постоянная момента электродвигателя, c_ω – коэффициент противо-ЭДС электродвигателя, k_g – передаточное число редуктора, η_g – КПД редуктора, J_d – момент инерции электродвигателя со шкивом, r_s – радиус шкива на на выходном валу редуктора, I – сила тока в обмотке якоря электродвигателя, u – напряжение на обмотке якоря электродвигателя, N – сила реакции опоры тележки, $\mu_{b\text{eq}} = \mu_{bv} + \frac{\mu_d}{r_s^2}$, $M_{\text{eq}} = m + M + J_d\eta_g k_g^2/r_s^2$, $J_{\text{eq}} = J + ml^2$, $\Delta(\varphi) = M_{\text{eq}}J_{\text{eq}} - m^2l^2\cos^2(\varphi)$, $\operatorname{sign}(\cdot)$ – функция знака.

В работе одновременно ставится задача стабилизации маятника в верхнем положении и задача регулирования положения подвижного основания в заданном положении

$$
\lim_{t\to\infty} |\bar{x}| \le \delta_1, \ \lim_{t\to\infty} |\varphi| \le \delta_2, \tag{2}
$$

где $\bar{x} = x - x_{\text{ref}}$, $x_{\text{ref}} = \text{const}$ – заданное положение стабилизации подвижного тела, $\delta_1, \delta_2 = \text{const} > 0$ – заданные константы.

2 Синтез нелинейного закона управления

Рассмотрим синтез нелинейного закона управления на основе пошаговой процедуры преобразования исходной системы к блочной канонической форме управляемости. Рассматривая механическую подсистему системы (1) с учетом (2) и используя процедуру линеаризации, получим

$$
\dot{x} = Ax + BI + Q\xi, \tag{3}
$$

где $$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{mglM_{\text{eq}}}{\Delta} & 0 & -\frac{\mu_p M_{\text{eq}}}{\Delta} & -\frac{\mu_{\text{beq}}ml}{\Delta} \\ \frac{m^2l^2g}{\Delta} & 0 & -\frac{\mu_p ml}{\Delta} & -\frac{J_{\text{eq}}\mu_{\text{beq}}}{\Delta} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{mlc_i}{\Delta r_s} \\ \frac{J_{\text{eq}}c_i}{\Delta r_s} \end{pmatrix}, \quad \Delta=\left(M+\frac{J_d\eta_g k_g^2}{r_s^2}\right)J_{\text{eq}}+Jm,$$

$y=\begin{pmatrix}\varphi & \bar{x} & \omega & v\end{pmatrix}^{\text{T}}$, $\xi=-\mu_{bd}N\text{sign}(v)$, $Q=\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{ml}{\Delta} & \frac{J_{\text{eq}}}{\Delta}\end{pmatrix}^{\text{T}}$.

Шаг 1. Обозначим матрицу преобразования системы (3) в каноническую форму управляемости относительно фиктивного управления через T_c, тогда матрицы A, B, Q и вектор состояния y в канонической форме управляемости запишутся в виде

(4) $$A_c=T_cAT_c^{-1},\ B_c=T_cB,\quad Q_c=T_cQ,\quad y^*=T_cy.$$

Введем также в рассмотрение матрицу преобразования T_b из канонической формы (4) в блочную форму вида

$$A_b=\begin{pmatrix} -k_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & 1 \\ \text{x} & \text{x} & \text{x} & \text{x} \end{pmatrix},\ B_b=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ T_b=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 1 & 0 & 0 \\ k_1^2 & -k_1-k_2 & 1 & 0 \\ -k_1^3 & k_2(k_1+k_2)+k_1^2 & -k_1-k_2-k_3 & 1 \end{pmatrix}$$

где через x обозначены ненулевые элементы, которые могут быть вычислены с помощью матриц подсистемы (3) на основе хорошо известных процедур [3].

С учетом введенных обозначений

(5) $$A_b=T_b^{-1}T_cAT_c^{-1}T_b,\ B_b=B_c,\quad Q_b=Q_c,\quad \tilde{y}=T_b^{-1}y^*.$$

Шаг 2. При выборе фиктивного управления, в качестве которого выступает момент электродвигателя I таким образом, что последняя компонента вектора системы (5) сходится в заданную окрестность нуля, обеспечивается стабилизация всего вектора $\tilde{y}$, а значит и исходных переменных механической подсистемы (вектор y). Для синтеза фиктивного I и реального управления на втором шаге введем замену переменных и управление в виде

(6) $$s=\frac{c_i}{r_s}I+(0\,0\,0\,1)^{\text{T}}A_b\tilde{y}-\tilde{I},\qquad \dot{\tilde{I}}=-\alpha\tilde{I}-V\text{sign}(\tilde{y}_4),\quad \tilde{y}_4=[0\,0\,0\,1]\tilde{y},$$
$$u=-U\text{sign}(s),\qquad \alpha=\text{const}>0,\ V=\text{const}>0,\quad U=\text{const}>0,$$

чтобы привести замкнутую электромеханическую систему к виду

(7) $$\dot{\tilde{y}}_1=-k_1\tilde{y}_1+\tilde{y}_2,\qquad \dot{\tilde{y}}_2=-k_2\tilde{y}_2+\tilde{y}_3,\qquad \dot{\tilde{y}}_3=-k_3\tilde{y}_3+\tilde{y}_4,\qquad \dot{\tilde{y}}_4=\tilde{I}+s+\xi(t),$$
$$\dot{\tilde{I}}=-\alpha\tilde{I}-V\text{sign}(\tilde{y}_4),\quad \dot{s}=\frac{c_i}{r_s}\left(-\frac{R}{L}I-\frac{c_\omega}{Lr_s}v-\frac{U}{L}\text{sign}(s)\right)-\alpha\tilde{I}-V\text{sign}(\tilde{y}_4).$$

При определенных начальных условиях и достаточной амплитуде разрывного управления U

$$U>\frac{Lr_s}{c_i}\left|\frac{c_i}{r_s}\left(-\frac{R}{L}I-\frac{c_\omega}{Lr_s}v\right)-\alpha\tilde{I}-V\text{sign}(\tilde{y}_4)\right|$$

в замкнутой системе (7) за конечное время возникает скользящий режим, движение в котором описывается редуцированными уравнениями

$$\dot{\tilde{y}}_1=-k_1\tilde{y}_1+\tilde{y}_2,$$
$$\dot{\tilde{y}}_2=-k_2\tilde{y}_2+\tilde{y}_3,$$
$$\dot{\tilde{y}}_3=-k_3\tilde{y}_3+\tilde{y}_4,$$
$$\dot{\tilde{y}}_4=\tilde{I}+\xi(t),$$
$$\dot{\tilde{I}}=-\alpha\tilde{I}-V\text{sign}(\tilde{y}_4),$$

Можно показать [4], что при определенном выборе параметров α, V внутреннего контроллера (6), обеспечивается решение поставленной задачи (2) с заданной точностью.

Литература

1. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. – М.: ГИФМЛ, 1961.

2. *Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л.* Теоретические основы электротехники. Том 1. – Спб.: Питер, 2004.

3. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. – СПб.: Наука, 2000.

4. *Kochetkov S.A., Utkin V.A.* Invariance in systems with unmatched perturbations // Automation and Remote Control. Vol. 74. 2013, No. 7. – P. 1097-1127.