УСТОЧИВОСТЬ ОДНОЙ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ[55]

Каменецкий В.А.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
Россия, г. Москва , ул. Профсоюзная д.65
vlakam@ipu.ru

Аннотация: Рассматривается задача устойчивости одного класса следящих систем. Показывается, что следящим системам этого класса можно поставить в соответствие линейные системы с переключениями, устойчивость которых эквивалентна устойчивости исходных следящих систем. Это позволяет исследовать устойчивость следящих систем методами, разработанными для систем с переключениями.

Ключевые слова: матричные неравенства, квадратичные функции Ляпунова, системы с переключениями, устойчивость.

Введение

Вопросы устойчивости и стабилизации следящих систем привлекают внимание исследователей в течении длительного времени [1-4]. Целью настоящей работы является сведение задачи об абсолютной устойчивости одного класса следящих систем, рассмотренных в [1,2], к задаче устойчивости линейных систем с переключениями при произвольных законах переключения между системами. Системы с переключениями являются специальным классом гибридных систем. Теория таких систем активно развивается в последнее время. Переход к задаче устойчивости систем с переключениями позволяет использовать для исследования устойчивости следящих систем методы, разработанные для систем с переключениями, в частности, метод функций Ляпунова. При использовании простейших функций Ляпунова – квадратичных – задача сводится к вопросу о существовании общей квадратичной функции Ляпунова (ОКФЛ). Для решения этого вопроса можно использовать как методы численного решения линейных матричных неравенств, так и предложенные в [5] частотные условия существования ОКФЛ.

1 Постановка задачи

В [1,2] рассматривается задача абсолютной устойчивости систем, описывающих работу следящего электропривода. В [1] рассматриваются системы второго порядка, а в [2] – системы третьего порядка. Здесь рассмотрим общие уравнения из этих публикаций, не ограничивая порядок системы, т.е. для $x \in R^n$, в результате будем исследовать систему

$$\begin{gathered} \dot{x} = Ax + bf(\sigma_1, t), \\ \sigma_1 = \langle c, x\rangle + \varphi(\sigma_2, t),\ \sigma_2 = \langle d, x\rangle,\ f(0,t) \equiv 0,\ \varphi(0,t) \equiv 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где $A \in R^{n\times n}$, $c, d \in R^n$ – постоянные матрица и векторы. Функции $f(\sigma_1, t)$ и $\varphi(\sigma_2, t)$ непрерывны по σ_1 и σ_2 соответственно, измеримы по t и подчинены ограничениям

$$0 \le f(\sigma_1, t)\sigma_1 \le k_1\sigma_1^2,\ 0 \le \varphi(\sigma_2, t)\sigma_2 \le k_2\sigma_2^2. \tag{2}$$

Абсолютная устойчивость системы (1) в классе нелинейностей (2) означает, что при любом выборе функций f и φ, удовлетворяющих (2), система (1) будет асимптотически устойчива в целом.

2 Переход к системе с переключениями

Абсолютная устойчивость системы (1) в классе нелинейных характеристик (2) эквивалентна абсолютной устойчивости линейной нестационарной системы

$$\begin{gathered} \dot{x} = Ax + bu_1(t)\sigma_1, \\ \sigma_1 = \langle c, x\rangle + u_2(t)\sigma_2,\ \sigma_2 = \langle d, x\rangle, \end{gathered} \tag{3}$$

в классе измеримых функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ при ограничениях $u_i(t) \in [0, k_i]$. Отбросим аргумент у функций $u_i(t)$ и перепишем систему (3) в виде

$$\dot{x} = Ax + bu_1(\langle c, x\rangle + u_2\langle d, x\rangle) = (A + u_1bc^T + u_1u_2bd^T)x,$$

[55] *Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президиума РАН "Актуальные проблемы робототехники" (Проект № I.29)*

где $\{\cdot\}^T$ – операция транспонирования. Введем обозначение $u_3 = u_1 u_2$, тогда $u_3 \in [0,\ k_2 u_1]$. Очевидно, для множества матриц $A + u_1 bc^T + u_1 u_2 bd^T$ выполнено соотношение

$$\bigcup_{u_1 \in [0,k_1];u_3 \in [0,k_2 u_1]} \{A + u_1 bc^T + u_3 bd^T\} = \operatorname{conv}\{A_1, A_2, A_3\},$$

где матрицы A_s определены соотношениями

(4) $A_1 = A,\ \ A_2 = A + k_1 bc^T,\ \ A_3 = A + k_1 bc^T + k_1 k_2 bd^T.$

Показывается, что множество решений системы (3) совпадает с множеством решений дифференциального включения

(5) $\dot{x} \in F(x),\ \ F(x) = \{y :\ y = Ax,\ \ A \in \operatorname{conv}\overline{A}\},$

в котором $\overline{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$ с матрицами A_s из (4). Устойчивость включения (5), в свою очередь, эквивалентна устойчивости системы с переключениями

(6) $\dot{x} = A(t)x,\ \ A(t) \in \overline{A},$

с тем же множеством $\overline{A}$ и матрицами A_s, здесь $A(t) :\ R_+ \to \overline{A}$ – произвольное кусочно-постоянное отображение.

Использование квадратичных функций Ляпунова $v(x) = x^T L x,\ \ L = L^T = \left\| l_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n}$, для исследования устойчивости включения (5) и системы с переключениями (6) сводится к вопросу о разрешимости системы линейных матричных неравенств

(7) $A_s^T L + L A_s < 0,\ \ s = \overline{1,3}\,,$

относительно матрицы L. Матричное неравенство $W < 0$ (> 0), для матрицы $W = W^T$ означает, что квадратичная форма $x^T W x$ является отрицательно (положительно) определенной, т. е. $x^T W x < 0$ (> 0) при $x \neq 0$. Таким образом, из разрешимости системы неравенств (7) следует устойчивость исходной следящей системы (1). Можно решать вопрос разрешимости системы неравенств (7) численно, используя готовые программы, например, в среде MATLAB, а можно аналитически, используя предложенные в [5] частотные условия.

Из вида матриц A_s из (4) следует, что система (7), в которой матрицы A_s определены соотношением (4), является связной линейной системой с переключениями треугольного типа [5], и для исследования ее устойчивости, а следовательно, и для исследования устойчивости системы (1), применим весь арсенал средств, предложенных в [5]. В [5] приводятся частотный критерий разрешимости систем вида (7) (теорема 2), необходимое (теорема 3) и достаточное (теорема 4) частотные условия разрешимости таких систем. Формулировка критерия потребует слишком много места, поэтому ограничимся формулировками необходимого и достаточного частотных условий разрешимости системы (7) с учетом специфики системы (1).

Введем обозначения $W_c(i\omega) = c^T \Delta(i\omega) b,\ \ W_d(i\omega) = d^T \Delta(i\omega) b,\ \ \Delta(i\omega) = (A - i\omega E_n)^{-1}$, где E^n – единичная $n \times n$ матрица. В этих обозначениях модификацию теоремы 3[5] для случая системы (1) дает следующая

Теорема 1. Пусть система (6), задаваемая матрицами $\{A_1, A_2, A_3\}$ из (4) имеет ОКФЛ (система (7) разрешима), тогда при всех $\omega \in [-\infty, \infty]$ выполняются следующие частотные неравенства:

$$1 + k_1 \operatorname{Re} W_c(i\omega) > 0, \quad 1 + k_1 \operatorname{Re} W_c(i\omega) + k_1 k_2 \operatorname{Re} W_d(i\omega) > 0,$$

$$\left(1 + k_1 \operatorname{Re} W_c(i\omega)\right)\left(1 + k_1 \operatorname{Re} W_c(i\omega) + k_1 k_2 \operatorname{Re} W_d(i\omega)\right) + \\ + k_1^2 \operatorname{Im} W_c(i\omega) \operatorname{Im}\left(W_c(i\omega) + k_2 W_d(i\omega)\right) > 0.$$

Специфика использования -процедуры и частотной теоремы для системы (1) состоит в следующем. Неравенство на производную квадратичной функции Ляпунова в силу (1) имеет вид

$$x^T (A^T L + LA) x + 2f\langle Lb, x\rangle < 0.$$

Это неравенство должно выполняться при всех $(x, f, \varphi) \neq 0$, удовлетворяющих (2), которые эквивалентны неравенствам

$$f(k_1\sigma_1 - f) = f(k_1\langle c, x\rangle + k_1\varphi - f) \geq 0, \quad \varphi(k_2\sigma_2 - \varphi) = \varphi(k_2\langle d, x\rangle - \varphi) \geq 0.$$

В соответствии с приемом -процедуры составим квадратичную форму $(\tau_1 > 0, \tau_2 > 0)$

(8) $x^T(A^TL+LA)x+f(x^TLb+\ b^TLx)+\ \tau_1 f(k_1\langle c,x\rangle+\ k_1\varphi-f)+\ \tau_2\varphi(k_2\langle d,x\rangle-\ \varphi)\ <0.$

Из частотной теоремы следует условие разрешимости матричного неравенства, соответствующего форме (8), которое дает достаточное условие существования ОКФЛ для системы (6).

Теорема 2. Пусть матрица A гурвицева и существует число $\delta\ >\ k_1/2\ (\delta=\sqrt{\tau_2/\tau_1})$, такое что при всех $\omega\ \in[-\infty,\infty]$ выполняется условие положительной определенности эрмитовой формы

$$D(i\omega)=\begin{pmatrix}1+\ k_1\mathrm{Re}\,W_c(i\omega) & -\,k_1/2\delta+\ (k_2\delta/2)\overline{W_d}(i\omega)\\ -\,k_1/2\delta+\ (k_2\delta/2)W_d(i\omega) & 1\end{pmatrix}>0,\quad \omega\ \in[-\infty,\infty].$$

Тогда система (6), задаваемая матрицами $\{A_1,A_2,A_3\}$ из (4), имеет ОКФЛ (система (7) разрешима, системы (6) и (1) устойчивы).

Заключение

Методы исследования устойчивости следящих систем, предлагаемые в [1,2], сводятся к следующему. Множество возмущений системы загрубляется, говоря условно, вместо треугольника берется содержащий его прямоугольник. Для такой системы устанавливаются необходимые и достаточные условия устойчивости, которые служат достаточными условиями устойчивости исходной системы. С другой стороны, множество возмущений сужается, вместо треугольника берется только сторона этого треугольника. Условия устойчивости такой системы являются необходимыми условиями устойчивости исходной системы. Методы [1,2] применимы только для систем второго и третьего порядков. В настоящей работе множество возмущений описывается точно, но загрубляется критерий устойчивости – наличие ОКФЛ является лишь достаточным условием устойчивости систем с переключениями. С другой стороны, как численные методы, так и частотные условия предлагаемые в работе, можно использовать для систем произвольного порядка. Разумеется, увеличение порядка усложняет задачу, но не является столь критическим, как в методах [1,2].

Литература

1. *Либерзон М.Р.* Абсолютная устойчивость одного класса следящих систем // Автоматика и телемеханика. 1979, № 12. – С.25-28.

2. *Либерзон М.Р.* Об абсолютной устойчивости систем третьего порядка с двумя нелинейными элементами // Вестник МГУ (матем., мех). 1980. № 3. – С.88-91.

3. *Porter B., Grujic Lj.T.* Continuous-time tracking systems incorporating Lur’e plants with multiple non-linearities // Int. J. Syst. Sci. Vol. 11. 1980, № 7. – P.827-840.

4. *Ахобадзе А. Г., Краснова С. А.* Задача слежения в линейных многомерных системах при наличии внешних возмущений // Автоматика и телемеханика. 2009, № 6. – С.21-47.

5. *Каменецкий В.А.* О Частотные условия устойчивости гибридных систем // Автоматика и телемеханика. 2017, № 12. – С.3-25.

СИНТЕЗ ПОДСИСТЕМЫ НАБЛЮДЕНИЯ ДЛЯ БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Кокунько Ю.Г., Краснов Д.В.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,

Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная д.65

juliakokunko@gmail.com, dim93kr@mail.ru

Аннотация: В рамках синтеза системы слежения для беспилотного летательного аппарата (БПЛА) при действии внешних неконтролируемых возмущений и неполных измерениях вектора состояния разработана структура подсистемы наблюдения, которая включает два наблюдателя состояния. Первый наблюдатель дает оценки скоростей по измерениям координат центра масс БПЛА. Второй наблюдатель по измерениям ошибок слежения дает оценки смешанных переменных (функций от переменных состояния, внешних воздействий и их производных), по которым формируется обратная связь.

Ключевые слова: БПЛА, слежение, наблюдатель состояний и возмущений, кусочно-линейные функции

Введение

Разработка беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) с автоматическим управлением является перспективным направлением военной и гражданской авиации. В работах, посвященных синтезу систем автоматического управления летательными аппаратами, как правило, в законе управления