ПОСТРОЕНИЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СЛАБОСВЯЗАННЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ МЕТОДА SDRE[54]

Даник Ю.Э., Дмитриев М.Г.

Институт системного анализа Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук,

Россия, г. Москва, просп. 60-летия Октября, д.9

danik@isa.ru, mdmitriev@mail.ru

Аннотация: Для нелинейных дискретных слабосвязанных систем большой размерности строится стабилизирующий регулятор на основе приближенного решения уравнения Риккати с зависящими от состояния коэффициентами. Система рассматривается как регулярно возмущенная с параметром в правой части, что позволяет строить асимптотическое разложение решения уравнения Риккати по малому параметру. Полученное разложение в ряде случаев можно улучшить путем построения Паде аппроксимации.

Ключевые слова: подход SDRE, нелинейные дискретные слабосвязанные системы, разложение по параметру, Паде аппроксимация, декомпозиция.

Введение

Рассматривается нелинейная дискретная слабосвязанная система управления [1]

(1) $$x(t+1)=A(x,\varepsilon)x+B(x,\varepsilon)u,\ x(0)=x_0,\ I(u)=\sum_{t=0}^{\infty}x^TQ(x,\varepsilon)x+u^TRu\to\inf_u,$$

где $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\in X,\ x_1\in R^n,\ x_2\in R^m$, $u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\in R^r, u_1\in R^{r_1}, u_2\in R^{r_2}$, $r_1+r_2=r$, $t=0,1,2,\ldots$, $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ R 1

$$A(x,\varepsilon)=\begin{bmatrix}A_1(x_1) & \varepsilon A_2(x_2)\\ \varepsilon A_3(x_1) & A_4(x_2)\end{bmatrix},\ B(x,\varepsilon)=\begin{bmatrix}B_1(x_1) & \varepsilon B_2(x_2)\\ \varepsilon B_3(x_1) & B_4(x_2)\end{bmatrix},Q(x,\varepsilon)=\begin{bmatrix}Q_1(x_1,\varepsilon) & \varepsilon Q_2(x_1,x_2,\varepsilon)\\ \varepsilon Q_2^T(x_1,x_2,\varepsilon) & Q_3(x_2,\varepsilon)\end{bmatrix}\ge 0,$$

$$Q_1(x_1,\varepsilon)=Q_{10}+\varepsilon Q_{11}(x_1)+\varepsilon^2Q_{12}(x_1),\quad Q_2(x_1,x_2,\varepsilon)=Q_{20}+\varepsilon Q_{21}(x_1,x_2),$$

$$Q_3(x_2,\varepsilon)=Q_{30}+\varepsilon Q_{31}(x_2)+\varepsilon^2Q_{32}(x_2),$$

$$R=\begin{bmatrix}R_1 & 0\\ 0 & R_2\end{bmatrix}>0.$$

Здесь может быть построен стабилизирующий регулятор основанный на решении уравнения Риккати с зависящими от состояния коэффициентами (SDRE) с помощью асимптотических разложений по ε и построения одноточечных Паде аппроксимаций, действующих в более широкой области изменения параметра, чем асимптотика по малому параметру. Здесь впервые строится Паде аппроксимация для решения уравнения Риккати в дискретном случае. Согласно подходу SDRE субоптимальное управление в этой задаче будем искать в виде

(2) $$u(x,\varepsilon)=-\left[R+B(x,\varepsilon)^TP(x,\varepsilon)B(x,\varepsilon)\right]^{-1}B(x,\varepsilon)^TP(x,\varepsilon)A(x,\varepsilon)x,$$

где $P(x,\varepsilon)$ – положительно определенное решение соответствующего уравнения Риккати

(3) $$A^T(x,\varepsilon)PA(x,\varepsilon)-P-A^T(x,\mu)PB(x,\varepsilon)\tilde{R}(x,\varepsilon)^{-1}B^T(x,\varepsilon)PA(x,\varepsilon)+Q(x,\varepsilon)=0,$$

где $\tilde{R}(x,\varepsilon)=(R+B^T(x,\varepsilon)PB(x,\varepsilon))$. Решение уравнения (3) будем искать в форме

(4) $$\tilde{P}_2(x,\varepsilon)=\begin{bmatrix}P_1(x_1,x_2,\varepsilon) & \varepsilon P_2(x_1,x_2,\varepsilon)\\ \varepsilon P_2^T(x_1,x_2,\varepsilon) & P_3(x_1,x_2,\varepsilon)\end{bmatrix}=\tilde{P}_0(x_1,x_2)+\varepsilon\tilde{P}_1(x_1,x_2)+\varepsilon^2\tilde{P}_2(x_1,x_2),$$

где $P_1(x,\varepsilon)=P_{10}(x_1)+\varepsilon P_{11}(x)+\varepsilon^2P_{12}(x), P_2(x,\varepsilon)=P_{20}(x)+\varepsilon P_{21}(x),$
$P_3(x,\varepsilon)=P_{30}(x_2)+\varepsilon P_{31}(x)+\varepsilon^2P_{32}(x).$

[54] *Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 17-07-00281-а).*

1 Построение асимптотического разложения решения уравнения Риккати

Подставляя (4) в (3) и собирая члены при одинаковых степенях параметра ε, получаем систему для определения неизвестных матриц:

$P_{10}(x_1),\ P_{11}(x_1,x_2),\ P_{12}(x_1,x_2),\ P_{20}(x_1,x_2),\quad P_{21}(x_1,x_2),\ P_{30}(x_2),\ P_{31}(x_1,x_2),\ P_{32}(x_1,x_2).$

При $\varepsilon=0$ происходит декомпозиция системы (1), она распадается на две независимые подсистемы. Соответствующие уравнения Риккати для первой и второй подсистемы имеют вид

$$A_1^T(x_1)P_{10}(x_1)A_1(x_1)-P_{10}(x_1)-A_1^T(x_1)P_{10}(x_1)B_1(x_1)(R_1+B_1^T(x_1)P_{10}(x_1)B_1(x_1))^{-1}\times$$
$$\times B_1^T(x_1)P_{10}(x_1)A_1(x_1)+Q_{10}=0,$$
$$A_4^T(x_2)P_{30}(x_2)A_4(x_2)-P_{30}(x_2)-A_4^T(x_2)P_{30}(x_2)B_4(x_2)(R_2+B_4^T(x_2)P_{30}(x_2)B_4(x_2))^{-1}\times$$
$$\times B_4^T(x_2)P_{30}(x_2)A_4(x_2)+Q_{30}=0.$$

Соответствующие SDRE управления для подсистем представляются следующим образом

$$u_1(x_1)=-(R_1+B_1^T(x_1)P_{10}(x_1)B_1(x_1))^{-1}B_1^T(x_1)P_{10}(x_1)A_1(x_1)x_1,$$
$$u_2(x_2)=-(R_2+B_4^T(x_2)P_{30}(x_2)B_4(x_2))^{-1}B_4^T(x_2)P_{30}(x_2)A_4(x_2)x_2.$$

Найденные матрицы $P_{10}(x_1),\ P_{30}(x_2)$ формируют нулевое приближение к решению уравнения Риккати (3), а именно $P_0(x_1,x_2)$. В первом приближении получаем для матриц $P_{11}(x_1,x_2), P_{31}(x_1,x_2)-$ дискретные уравнения Ляпунова

$$A_{cl,1}{}^T(x_1)P_{11}(x_1,x_2)A_{cl,1}(x_1)-P_{11}(x_1,x_2)+Q_{11}(x_1)=0,$$
$$A_{cl,2}{}^T(x_2)P_{31}(x_1,x_2)A_{cl,2}(x_2)-P_{31}(x_1,x_2)+Q_{31}(x_2)=0,$$
$$A_{cl,1}(x_1)=A_1(x_1)-B_1(x_1)(R_1+B_1^T(x_1)P_{10}(x_1)B_1(x_1))^{-1}B_1^T(x_1)P_{10}(x_1)A_1(x_1),$$

где

$$A_{cl,2}(x_2)=A_4(x_2)-B_4(x_2)(R_2+B_4^T(x_2)P_{30}(x_2)B_4(x_2))^{-1}B_4^T(x_2)P_{30}(x_2)A_4(x_2).$$

Для $P_{12}(x_1,x_2),\ P_{32}(x_1,x_2)$ также получаем дискретные уравнения Ляпунова.

$$A_{cl,1}{}^T(x_1)P_{12}(x_1,x_2)A_{cl,1}(x_1)-P_{12}(x_1,x_2)+C_{12}(x_1,x_2)=0,$$
$$A_{cl,1}{}^T(x_1)P_{32}(x_1,x_2)A_{cl,1}(x_1)-P_{32}(x_1,x_2)+C_{32}(x_1,x_2)=0. \tag{5}$$

Матрицы $C_{12}(x_1,x_2), C_{32}(x_1,x_2)$ в (5) содержат известные матрицы и уже найденные члены разложения. Для связывающей подсистемы при ε и ε^2 получаем дискретные уравнения Сильвестра

$$A_{cl,1}{}^T(x_1)P_{20}(x)A_{cl,2}(x_2)-P_{20}(x)+C_{20}(x)=0,\ A_{cl,1}{}^T(x_1)P_{21}(x)A_{cl,2}(x_2)-P_{21}(x)+C_{21}(x)=0.$$

2 Одноточечная Паде аппроксимация

Построим для решения уравнения (3) матричную Паде аппроксимацию [2] порядка *[1/2]* на основе асимптотического разложения уравнения Риккати по малому параметру (4) в виде

$$K_{[1/2]}(x,\varepsilon)=\left(PA_{[1/2]}(x,\varepsilon)+PA^T{}_{[1/2]}(x,\varepsilon)\right)/2, \tag{6}$$

где $PA_{[1/2]}(x,\varepsilon)=\left(M_0(x)+\varepsilon M_1(x)\right)\left(E+\varepsilon N_1(x)+\varepsilon^2N_2(x)\right)^{-1}$ и E – единичная матрица. Неизвестные коэффициенты Паде аппроксимации $M_0(x), M_1(x), N_1(x), N_2(x)$ находятся из системы уравнений $PA_{[1/2]}(x,\varepsilon)=\tilde{P}_2(x,\varepsilon)$, которая представлена в виде

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0\\ 0 & E & -\tilde{P}_0(x) & 0\\ 0 & 0 & -\tilde{P}_1(x) & -\tilde{P}_0(x)\\ 0 & 0 & \tilde{P}_2(x) & \tilde{P}_1(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_0(x)\\ M_1(x)\\ N_1(x)\\ N_2(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{P}_0(x)\\ \tilde{P}_1(x)\\ \tilde{P}_2(x)\\ 0\end{pmatrix}. \tag{7}$$

Имеет место

Теорема. Пусть для всех $x \in X$, $\varepsilon > 0$ матрицы $\tilde{P}_0(x), \tilde{P}_1(x), \tilde{P}_2(x)$ существуют и система уравнений (7) для матриц $M_0(x), M_1(x), N_1(x), N_2(x)$ имеет единственное решение, матрица $E + \varepsilon N_1(x) + \varepsilon^2 N_2(x)$ невырожденная и действительные части собственных значений матрицы $PA_{[1/2]}(x,\varepsilon)$ являются положительными при $\forall x \in X$, $\varepsilon > 0$, тогда одноточечная матричная Паде аппроксимация $K_{[1/2]}(x,\varepsilon)$ (6) порядка [1/2] для решения уравнения (3) существует и при этом является положительно определенной при всех $x \in X$, $\varepsilon > 0$.

Получаем следующий параметрический набор регуляторов $u(x,\varepsilon) = -\left[R + B(x,\varepsilon)^T K_{[1/2]}(x,\varepsilon) B(x,\varepsilon)\right]^{-1} B(x,\varepsilon)^T K_{[1/2]}(x,\varepsilon) A(x,\varepsilon) x$ для системы (1).

Рассмотрим следующий пример

$$A_1(x_1) = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.5 + 0.1\cos(x_{11}) \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix},\ A_2(x_2) = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0.3 + 0.1\cos(x_{21}) & 1 \end{bmatrix},\ A_3(x_1) = \begin{bmatrix} 1.01 & 0 \\ 0.2 + 0.05\sin(x_{12}) & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_4(x_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.3 + 0.2\cos(x_{22}) & 1.2 \end{bmatrix},\ B_1(x_1) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 + 0.01x_{12} \end{bmatrix}^T,\ B_2(x_2) = \begin{bmatrix} 0.6 + 0.01x_{21} & 0.7 \end{bmatrix}^T,$$

$$B_3(x_1) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 + 0.01x_{11} \end{bmatrix}^T, B_4(x_2) = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 + 0.01x_{22} \end{bmatrix}^T,\ Q_{10} = \begin{bmatrix} 1400 & 10 \\ 10 & 1400 \end{bmatrix}, Q_{20} = \begin{bmatrix} 800 & 10 \\ 10 & 800 \end{bmatrix},$$

$$Q_{30} = \begin{bmatrix} 1600 & 10 \\ 10 & 1400 \end{bmatrix},\ Q_{11}(x_1) = \begin{bmatrix} 1200 + 0.01x_{11}^2 & 0 \\ 0 & 1200 + 0.01x_{12}^2 \end{bmatrix}, Q_{12}(x_1) = \begin{bmatrix} 450 + 0.01x_{11}^2 & 0 \\ 0 & 750 + 0.01x_{12}^2 \end{bmatrix},$$

$$Q_{21}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}, Q_{31}(x_2) = \begin{bmatrix} 1200 + 0.01x_{21}^2 & 0 \\ 0 & 1200 + 0.01x_{22}^2 \end{bmatrix},$$

$$Q_{32}(x_2) = \begin{bmatrix} 450 + 0.01x_{21}^2 & 0 \\ 0 & 750 + 0.01x_{22}^2 \end{bmatrix}, R_1 = 1, R_2 = 1,\ x_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

На Рис. 1. показано, что Паде аппроксимация $K_{[1/2]}(x,\varepsilon)$ может быть использована в качестве матрицы коэффициентов усиления в более широкой области изменения ε по сравнению с асимптотикой решения уравнения Риккати.

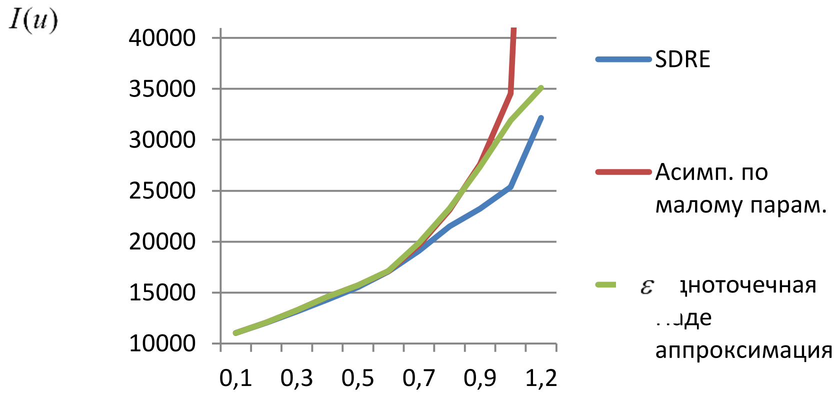

Рис. 1. Сравнение алгоритмов управления по значению критерия при $\varepsilon > 0$

Литература

1. *Даник Ю.Э., Дмитриев М.Г., Макаров Д.А.* Построение стабилизирующих регуляторов в нелинейных непрерывных системах большой размерности на основе асимптотики решений матричных алгебраических уравнений Риккати // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2018): материалы Одиннадцатой междунар. конфер., 1 - 3 окт. 2018 г. – М.: ИПУ РАН, 2018. – 498 с. – С. 351-353.

2. *Danik Yu.E., Dmitriev M.G.* Construction of Parametric Regulators for Nonlinear Control Systems Based on the Pade Approximations of the Matrix Riccati Equation Solution // IFAC-PapersOnLine. Vol. 51. 2018, Issue 32. – P. 815-820.