МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ОДНОЙ МАКРОМОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

Черняев А.П., Прончева О.Г.

Московский физико-технический институт (государственный университет), Россия, г. Долгопрудный Московской обл., Институтский пер.д.9

chernyaev49@yandex.ru,

Меерсон А.Ю.

Российский экономический университет имени. Г.В. Плеханова, Россия, г. Москва, Стремянный пер. д.36

allameerson@yandex.ru

Аннотация: Рассматриваются математические вопросы некоторой макромодели экономического роста. Основное внимание уделено одной из главных задач – отысканию оптимального в некотором смысле способа разделения произведенного продукта на потребляемую и накапливаемую части. Критерием оптимальности выбрано среднедушевое потребление.

Ключевые слова: экономический рост, производственная функция, производственная мощность, среднедушевое потребление.

Введение

Производители рассматриваемой модели экономического роста выпускают однородный продукт. Производственная функция зависит от производственной мощности и количества производителей. Темп прироста производителей, коэффициент приростной фондоемкости, коэффициент выбытия мощности и характерное время ее наращивания мощности считаются непрерывными функциями, зависящими от времени произвольным образом. Описывается нахождение оптимального в некотором смысле способа разделения производственного продукта на потребляемую и накапливаемую части. При этом оптимизируется среднедушевое потребление.

1 Основные переменные рассматриваемой модели экономического роста

У теории экономического роста было два периода бурного развития [1]. В первом этапе были созданы экзогенные теории Рамсея [2], Солоу [3] и перекрывающихся поколений. Во втором этапе появились эндогенные теории, наиболее известны из которых модели Ромера [4] и Нардхауса [5]. В настоящее время известны преимущества эндогенных теорий над экзогенными [1].

Однако, модель Солоу достаточно популярна. Уравнение для фондовооруженности, следующее из модели Солоу [6,7] в общем случае не интегрируется. Оно интегрируется в частном случае производственной функции Кобба–Дугласа [7, 8], и, поэтому, может быть получено золотое правило Солоу [8, 9, 10]. В настоящей статье рассматривается модель экономического роста в достаточно общей постановке. В ней можно поставить и решить задачу нахождения оптимального в некотором смысле способа разделения производственного продукта на потребляемую и накапливаемую части, оптимизировать среднедушевое потребление, а также сформулировать и вывести золотое правило роста Солоу.

В рассматриваемой модели экономического роста количество независимых производителей $R = R(t)$ считается зависящим от непрерывного времени $t \in [0, T]$ и удовлетворяющим задаче Коши

(1) $$R'(t) = \alpha(t)R(t), \quad R(0) = R_0.$$

Решение задачи (1) имеет вид

(2) $$R(t) = R_0 \exp\left(\int_0^t \alpha(\tau)d\tau\right).$$

Известная функция $\alpha = \alpha(t)$ в (1) и (2) называется темпом прироста производителей. Произведенный однородный продукт используется и как потребительский, и как фондообразующий. Национальный доход $Y = Y(t)$ разделяется на потребление $C = C(t)$ и на накопление $J = J(t)$:

(3) $$Y = C + J.$$

Мощностью $M = M(t)$ назовем максимальный выпуск продукта [8, 9, 10]. Тогда

(4) $$Y = F(M, R).$$

Известны свойства (4), которые постулируются [8, 9]. Ее удобно представить в виде

(5) $$F = M(t) f(x(t)).$$

В формуле (5) величина

(6) $$x = x(t) = R(t)/M(t)$$

равна количеству производителей на единице мощности. Функция $f(x)$ при $x \in [0, x_M]$, где $x_M = R_M/M$, а $R_M = R_M(t)$ – число рабочих мест при мощности $M(t)$, причем $f(x_M) = 1$ [10], обладает свойствами $f(0) = 0$, $f' > 0$ – так как выпуск растет с увеличением числа производителей, $f'' < 0$ – так как имеет место насыщение [10].

2 Уравнения и основная задача рассматриваемой модели экономического роста

Рассматривается задача отыскания оптимального способа разделения произведенного продукта на C и J (3). Оптимизировать мы будем среднедушевое потребление, то есть количество продукта, потребляемого одним работающим $c = c(t) = C(t)/R(t)$.

Пусть $I = I(t)$ – число единиц новой мощности, тогда

(7) $$J(t) = a(t)I(t),$$

где $a = a(t) > 0$ – коэффициент приростной фондоемкости – количество фондообразующего продукта для создания единицы новой мощности. Деградация основных фондов приводит к уменьшению мощности на величину bM, где $b = b(t)$ – коэффициент выбытия.

Итак, мы имеем скорость изменения мощности со временем

(8) $$M'(t) = I(t) - b(t)M(t).$$

Предположим [10], что имеет место пропорциональность

(9) $$I(t) = \beta(t)M(t),$$

где $\beta = \beta(t)$ – величина обратная характерному времени наращивания мощности. Тогда из (8) и (9)

(10) $$M'(t) = [\beta(t) - b(t)]M(t).$$

Интегрируя уравнение (10), получаем

(11) $$M(t) = M_0 \exp\left(\int_0^t [\beta(\tau) - b(\tau)]d\tau\right).$$

Здесь к уравнению (10) добавлено начальное условие $M(0) = M_0 > 0$. Обращаясь к (3), (7) и (9) для среднедушевого потребления имеем.

(12) $$c(t)=\frac{C(t)}{R(t)}=\frac{Y(t)-J(t)}{R(t)}=\frac{M(t)f(x(t))-a(t)I(t)}{R(t)}=\frac{M(t)f(x(t))-a(t)\beta(t)M(t)}{R(t)}.$$

Преобразовывая (12) с учетом (6), получим

(13) $$c(t)=f(x(t))-a(t)\beta(t)/R(t)/M(t)=f(x(t))-a(t)\beta(t)/x(t).$$

3 Максимизация среднедушевого потребления

Далее, рассмотрим случай

(14) $$a(t)\beta(t)=\gamma=const>0.$$

Из (13) и (14) следует, что

(15) $$c=\frac{f(x)-\gamma}{x}.$$

Максимум выражения (15) достигается при условии

(16) $$\frac{dc}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)-\gamma}{x}\right]=\frac{xf'(x)-f(x)+\gamma}{x^2}=0.$$

Равенство (16) дает уравнение для определения количества производителей на единице мощности x_m для искомого режима максимизации среднедушевого потребления

(17) $$x_m f'(x_m)-f(x_m)+\gamma=0.$$

Дополнительно предполагаем согласование R_0 из (1) и (2) с M_0 при $t=0$: $x_m=R_0/M_0$.

Разделив каждое слагаемое левой части уравнения (17) на $f(x_m)$, имеем

(18) $$\gamma/f(x_m)=1-x_m f'(x_m)/f(x_m).$$

Норму накопления $n=n(t)$ определим как

(19) $$n=n(t)=J(t)/Y(t)$$

Преобразуем теперь (19) используя (4), (5), (7) и (9)

(20) $$n(t)=a(t)I(t)/F(M(t),R(t))=a(t)\beta(t)M(t)/M(t)f(x(t))=\gamma/f(x(t)).$$

И когда в (20) мы вместо x мы подставим x_m мы с учетом (18), получаем

(21) $$n_m=\gamma/f(x(t))=1-x_m f'(x_m)/f(x_m).$$

Норма накопления (21) называется нормой золотого правила роста Солоу [10].

Заключение

Рассмотренная модель экономического роста является более общей, чем в [10] в силу того, что темп прироста занятых работников, количество фондообразующего продукта для создания единицы новой мощности, темп выбытия новой мощности и характерное время наращивания мощности являются непрерывными функциями времени произвольного характера. Рассмотренная задача максимизации среднедушевого потребления решается при наличии (14). При этом не делается предположение эдентичности темпов роста мощности и увеличения числа работников. Рассмотренные вопросы полезны и для других задач оптимального управления [6].

Литература

1. *Замулин О.А., Сонин К.И.* Экономический рост. 2018 года и уроки для России // Вопросы экономики. 2019. № 1. С. 11–36.

2. *Ramsey F.P.* A mathematical theory of saving // Economic Journal. Vol. 38. 1928, № 152. – P. 543-559.

3. *Solow R.* Technical change and aggregate production function // Review of Economics and Statistics. Vol. 39. 1957, № 3. – P. 312-320.

4. *Romer P.* Growth Based on Increasing Returns Due to Specialization // American Economic Review. Vol. 77. 1987. – P. 56-62.

5. *Nordhaus W.* Integrated assessment models of climate change // NBER Reporter. 2017, № 3. P. 16-20.
6. *Колемаев В.А.* Математическая экономика. – М.: ЮНИТИ. 1998. – 240 с.
7. *Меерсон А.Ю., Черняев А.П.* Варианты постановки задач оптимизации обобщенной полезности потребления в модели Солоу с ограничениями различного рода // Фундаментальные исследования. 2018. №7. Экономические науки. С. 121-125.
8. *Петров А.А.* Экономика. Модели. Вычислительный эксперимент. – М.: Наука. 1996. – 251 с.
9. *Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А.* Опыт математического моделирования экономики. М.: Энергоатомиздат. 1996. – 544 с.
10. *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Наука. Физматлит. 1997. 320 с.