ДИАГНОСТИКА ПРОТИВОРЕЧИВЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

Цодиков Ю.М.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная д.65
tsodikov@ipu.ru

Аннотация: В докладе показана сложность задачи диагностики противоречивых ограничений модели оптимального планирования производства нефтеперерабатыващего завода. На основе данных моделей ряда заводов показана сложность этой задачи и способ решения. Приведена специальная задача линейного программирования, для которой возможен теоретический анализ сложности диагностики несовместных ограничений.

Ключевые слова: оптимальное производственное планирование, несовместная задача, противоречивые модели.

Введение

При оптимальном планировании производства нефтеперерабатывающего завода (НПЗ) обычно выдвигаются требования достижения высокой эффективности и получения определенного количества продуктов при ограниченных ресурсах. Это зачастую приводит к противоречивой модели и несовместной задаче. Модели оптимального планирования производства имеют, как правило, большую размерность. В этом случае трудности содержательной интерпретации несовместного решения являются одним из основных факторов, ограничивающих применение моделей большой размерности. Модель оптимального планирования производства может быть несовместной в результате недостаточного количества ресурсов; ошибок в структуре потоков и параметрах модели; а также совместного действия этих двух факторов.

Несовместные задачи оптимального планирования рассматривались в работах по линейному программированию [1-2]. Возможность анализа несовместных задач предусматривается в различных системах оптимального планирования производства [3-5]. В оптимизаторе Xpress предлагается общий метод анализа несовместности, состоящий в том, чтобы найти небольшую часть матрицы, которая сама по себе несовместна [4]. Оптимизатор Xpress делает это, находя неприводимые несовместные множества ограничений - ННМ (irreducible infeasible sets - IIS). ННМ (IIS) - это минимальный набор ограничений, которые сами по себе несовместны, но становится допустимыми, если какое-либо ограничение (или несколько) удалены. Предполагается, что выявление ННМ помогает объясненть причины противоречивости ограничений [6-7].

В некоторых случаях, в том числе для моделей большой размерности, выявление причины несовместности, если поиск основан на ННМ, может оказаться очень длительным [4]. Кроме того, несовместная задача может быть такая, что в матрице ограничений нет ННМ, включающих небольшую часть матрицы.

В таких случаях вводятся переменные отклонения в ограничениях, чтобы сделать их допустимыми и эти отклонения штрафуются в целевой функции, т.е. вводятся штрафные функции. Введение штрафов за нарушение ограничений предусмотрено в различных системах оптимизации. При этом трудность анализа результатов состоит в том, что в решении часто получается достаточно много не нулевых отклонений в ограничениях.

1 Модель оптимального планирования и анализ несовместных ограничений

Модель оптимального планирования работы НПЗ на один период сформулирована в [8]. Задача решается методом последовательного линейного программирования ПЛП. На каждом шаге рекурсии решается задача ЛП. Часть коэффициентов матрицы ограничений являются постоянными величинами, а другие определяются заданными зависимостями. Как правило, это зависимости выхода продукта установок от качества сырья.

Для содержательной интерпретации несовместного решения в модель ЛП вводят штрафы u_i, v_i с коэффициентами d_i за нарушение некоторых ограничений. После введения штрафных переменных получим следующие ограничения и критерий:

(1) $$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m} d_i (u_i + v_i), \quad \mathrm{F} \to \max$$

(2) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - u_i + v_i = b_i, \ i = 1,...m, \ x_j \ge 0, \ u_i \ge 0, \ v_i \ge 0$$

После введения штрафных переменных система (1-2) становится совместной. В полученном решении анализируются величины штрафных переменных. Введение штрафов является инструментом исследования модели. Такая возможность исследования модели предусматривается в различных системах оптимального планирования [3-5]. В системе моделирования НПЗ [3] можно ввести штрафы избирательно с разными коэффициентами d_i за нарушение различных типов ограничений: показателей качества нефтепродуктов, производительности установок, условий материального баланса, запасов нефтепродуктов, энергозатрат и других. С целью исследования вводят штрафные переменные и по тем ограничениям, которые невозможно изменить по технологическим условиям производства.

Вся трудность анализа несовместной задачи состоит в том, что в результате решения часто получается много не нулевых переменных u_i>0, v_i>0 в ограничениях в том случае, когда достаточно изменить только одно ограничение для получения допустимого решения. В таблице приведены данные моделей двух НПЗ, для которых при такой размерности задач проявляются трудности интерпретации несовместных ограничений.

Таблица 1. Параметры моделей.

	НПЗ №1	НПЗ №2
Переменных задачи ЛП	2843	4915
Ограничений задачи ЛП	4323	3370
Ненулевых элементов матрицы	26273	27818

Эти модели примененялись при разработке проектов развития НПЗ и нефтехимии [9]. Методика выбора вариантов для анализа несовместных задач описана в [5]. Методика выбора варианта для анализа несовместных ограничений основана на сравнении нескольких предыдущих решений с штрафами.Такая методика выбора вариантов для анализа применялась при разработке моделей НПЗ.

В результате анализа результатов расчетов с моделями планирования различных заводов при получении несовместных ограничений наблюдаются следующие закономерности:

1.Одно противоречивое условие в модели может вызвать значительное число штрафных переменных u_i *>0,* v_i *>0.*

2.С ростом размерности задачи возрастает число штрафных переменных u_i *>0,* v_i *>0,* возникающих при одном противоречивом условии в модели.

3.Группа не нулевых штрафных переменных u_i *>0,* v_i *>0* не является стабильной. Состав группы зависит от различных факторов, например, от величин коэффициентов штрафов.

Несовместное ограничение, как правило, не изолированно и связано со многими другими ограничениями. Перечисленные закономерности проявляются достаточно часто, но наряду с этим есть простые случаи, когда одно противоречивое условие в модели приводит к одному несовместному ограничению. По смыслу задачи для НПЗ разные ограничения (2) существенно связаны между собой. Например, условия по производительности установок, количеству нефти, качеству нефти и другие могут приводить к одним и тем же несовместным ограничениям.

2 Специальная задача ЛП

Рассмотрим специальную несовместную задачу ЛП с *n* переменными и *m* ограничениями неравенствами при *m=n+1*. Выпишем задачу ЛП в удобном для дальнейшего виде:

(3) $$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \mathrm{F} \to \max$$

(4) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \qquad \mathrm{i=1,\dots m,}\ x_i \ge 0,\ \mathrm{m=n+1}\ .$$

Для задачи (3-4) обозначим допустимое множество задачи M и допустимое множество двойственной задачи M*. Будем рассматривать несовместную задачу 1-го рода, когда нет допустимого решения прямой задачи (M пусто) и есть решение двойственной задачи на множестве M* [2]. Такие задачи имеют экономический смысл. Для каждого ограничения (4) *i=1, ..., m* построим дополнение с обратным знаком неравенства: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i$

Следующая система ограничений (5) образуется пересечением дополнений:

(5) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i\ , \quad i = 1,\dots m, \quad x_j \ge 0\ .$$

Рассмотрим несовместную задачу (3-4), которая имеет следующие свойства:

1. Система несовместных ограничений (4) такая, что при исключении любого одного неравенства система имеет допустимое решение.
2. Все ограничений неравенства системы (4) линейно независимы.
3. Пересечение дополнений (5) образует замкнутое множество.

Симплекс метод на этапе поиска допустимого решения задачи (3-4) определяет дополнительные переменные u_i из условия:

(6) $$\varphi = \min \sum_{i=1}^{m} u_i$$

(7) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + u_i \ge b_i\ , \quad \mathrm{i=1,\dots m,}\ x_i > 0,\ u_i > 0.$$

На этапе поиска допустимого решения (6-7) симплекс метод даст список несовместных ограничений, включающий все ограничения с переменными $u_i > 0$, *i=1, ..., m.*

Для задачи (3-4) и системы ограничений (5) справедливы следующие утверждения:

1.На этапе поиска допустимого решения (3-4) все переменные $u_i > 0$. Таким образом, для определения на содержательном уровне, какое из *m* ограничений (4) является причиной несовместности задачи необходимо проверить влияние каждого ограничения.

2.При росте размерности задачи число несовместных ограничений (4) возрастает линейно.

3.Система ограничений (5) образует симплекс.

Специальная задача интересна тем, что свойства задачи ЛП (3-4) аналогичны закономерностям, которые описаны выше для несовместной общей задачи ЛП. Таким образом, задача (3-4) удобна при обучении для объяснения сложности диагностики несовместных ограничений задач планирования большой размерности.

Литература

1. *Dantzig G.B.* Linear programming and extensions. Princeton University Press. 1998.
2. *Еремин И.И.* Противоречивые модели оптимального планирования. М.: Наука, 1988. 305с.
3. Refinery and Petrochemical Modeling System (RPMS). www.honeywell.com.
4. Xpress Optimizer Reference Manual. www.fico.com/fico-xpress-optimization.

5. *Цодиков Ю.М.* Информационная модель решения несовместной задачи оптимального планирования производства 2018, №4. –С. 55-62.
6. *Chinneck J.W.* Feasibility and infeasibility in optimization. Springer 2008, p.270.
7. *Greenberg H.J.* Computer–Assisted Analysis for Diagnosing Infeasible or Unbounded. Linear Programs, Mathematical Programming Studies Vol.31, 1987, –p.79–97.
8. *Цодиков Ю.М., Хохлов А.С.* Нелинейные модели оптимального планирования работы нефтеперерабатывающего завода // Тр. VII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2013) Т.2 / М: ВЦ РАН, 2013. –С. 54–56.
9. *Соркин Л.Р., Шишорин Ю.Р., Цодиков Ю.М., Мостовой Н.В.,* Разработка и моделирование программ долгосрочного развития предприятий нефтепереработки и нефтехимии. Труды 10-й межд. Конф. «Управление развитием крупномасштабных систем» MLSD’2017, Т.1 - М.: ИПУ РАН, 2017, С. 123-131.