МИНИМАКС И МАКСИМИН В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ КРУПНОМАСШТАБНЫМИ ИННОВАЦИОННЫМИ ПРОЕКТАМИ

Топка В.В., Цвиркун А.Д.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная д.65
topka3@mail.ru, tsvirkun@ipu.ru

Аннотация: Рассматриваются задачи минимизации продолжительности выполнения проекта и задача максимизации показателя его надежности в условиях модели Рэлея показателя надежности работы проекта, заданного орграфом с дизъюнктивными входными дугами. Решение предложенных задач дискретного минимакса и дискретного максимина, представленных в виде задач нелинейного программирования находится при помощи эффективного метода.

Ключевые слова: минимакс, максимин, инновационный проект, методы оптимизации.

Введение

В информационных системах управления проектами количественная оценка риска расписания (Risk of Schedule) и риска стоимости (Risk of Cost) производится на основе моделирования методом Монте-Карло. Предлагаемый подход позволяет выполнить анализ параметра риска исполнения (Risk of Performance) [1] проекта, для которого аппарат его анализа не разработан. Риск исполнения, по завершении выполнить требуемую миссию – достигнуть заданных технических характеристик, основан на кумулятивной вероятности благоприятного / неблагоприятного исхода. Для неё: вероятность успеха проекта – это вероятность того, что при исполнении данного проекта отказ не произойдёт, а функция распределения вероятности безотказного исполнения принята за показатель надёжности выполнения. Преимущество предлагаемого подхода состоит в том, что он даёт инструмент для работы в неисследованной области.

1 Модель показателя надёжности работы

Пусть $F_U(u) = \mathrm{P}(U \le u)$ - вероятность того, что стоимость U работы при выполнении некоторого проекта не превзойдёт величины u. Предположим, что изменение вероятности dF пропорционально затраченному невозобновимому ресурсу u (стоимости), а чтобы обеспечить участок насыщения − пропорционально, также, разности между максимально возможной вероятностью 1 и достигнутой $F(u)$ при текущем уровне расхода ресурса. Тогда $dF = k(u)[1 - F(u)]du$. Пусть при выполнении работы $k(u) = 2bu$. Здесь $u \ge 0,$ $b > 0 -$ коэффициент пропорциональности. Тогда имеем дифференциальное уравнение с разделёнными переменными

$$\frac{dF}{1 - F(u)} = 2budu$$

и начальным условием $F(0) = 0$. Его решение – функция распределения вероятности

$$F(u;b) = 1 - \exp\left(-bu^2\right) = p(u), \tag{1}$$

которая подтверждена результатами статистического анализа эмпирических данных. Получили модель Рэлея, где b>0 – параметр масштаба, 2 – параметр формы, для функции распределения, заданной в вершинах-работах детерминированного инновационного проекта с дизъюнктивными входными дугами OR [2]. Будем говорить о $p(u)$ (1) как о показателе надёжности работы и применять полученное распределение вероятности для анализа параметра риска исполнения проекта (Risk of Performance). Для зависимости прямых затрат ресурса на работу от её продолжительности выбирается достаточно апробированная [2] линейная аппроксимация

$$s_j u_j = -r_j t_j + h_j, \tag{2}$$

где $t_j > 0 -$время, $u_j > 0 -$ невозобновимый (складируемый) ресурс; $s_j, r_j \in R^1_+;$ $h_j \in R^1$ - параметры линейной аппроксимации; $s_j -$ «цена» за единицу ресурса u_j, $r_j -$ «цена» за единицу времени t_j. Эти параметры вводятся ещё и для того, чтобы левая и правая части (2) выражались в одних единицах измерения.

2 Минимаксная задача управления продолжительностью выполнения проекта

Рассматривается минимаксная задача минимизации времени выполнения крупномасштабного сетевого проекта с дизъюнктивными входными дугами, надёжностными и бюджетными ограничениями, а также линейными связями между переменными.

$$\max_{1 \le i \le m} \sum_{j \in \mu_i} a_{ij} t_j \to \inf_{(u,t) \in U_1}.$$

Данная задача дискретного минимакса введением дополнительной переменной t_0, сводится к следующей задаче нелинейного программирования (НЛП):

$$t_0 \to \inf_{(u,t,t_0) \in U_1},$$

$$U_1 = \begin{cases} -t_0 + \sum\limits_{j \in \mu_i} a_{ij} t_j \le 0, \quad i = 1:m, \\ P - \prod\limits_{j \in \mu_i} a_{ij} \left[1 - \exp\left(-b_j u_j^2\right)\right] \le 0, \quad i = 1:m, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} c_j u_j - C \le 0, \quad s_j u_j = -r_j t_j + h_j, \; j = 1:n, \\ u_j, t_j, t_0 \in [\varepsilon, \ \mathrm{N}]. \end{cases}$$

Где в U_1–допустимом множестве задачи, j –номер вершины, μ_i – пути по вершинам – технологические цепочки из вершин нижнего уровня в конечную вершину, i – номер пути, матрица $\mathrm{A} = (a_{ij}) -$характеристическая функция системы ограничений, соответствующих топологии технологической сети, $P > 0$–заданное ограничение на показатель надежности проекта, $C > 0$ – заданная суммарная стоимость работ проекта, N–достаточно большое число.

3 Максиминная задача управления показателем надежности выполнения проекта

Рассматривается задача максимизации вероятности безотказного исполнения крупномасштабного инновационного проекта к определённому допустимому сроку, в качестве чего принимается гарантированная ее оценка снизу, которая в теории надежности определяется слабейшим звеном (наихудшим показателем из технологических цепочек μ_i из вершин нижнего уровня в конечную вершину) при заданных бюджетных и временных ограничениях и линейных связях между переменными. Таким образом, имеем задачу дискретного максимина

$$\min_{1\le i\le m} P_{\mu_i}(u) \to \sup_{(u,t)\in U_2},$$

где U_2 – допустимое множество задачи. Переменные и параметры задачи такие же, как и в п. 2; $T > 0$ – заданное ограничение на продолжительность проекта, $C > 0$ – заданная суммарная стоимость работ проекта. Задача дискретного максимина введением дополнительной переменной P_0 сводится к следующей задаче нелинейного программирования:

$$-P_0 \to \inf_{(u,t,P_0)\in U_2},$$

$$U_2 = \begin{cases} P_0 - \prod\limits_{j\in\mu_i} a_{ij}\left[1-\exp\left(-b_j u_j^2\right)\right] \le 0, \ \ i = 1:m, \\ \sum\limits_{j\in\mu_i} a_{ij} t_j - T \le 0, \qquad \sum\limits_{j=1}^{n} c_j u_j - C \le 0, \\ s_j u_j = -r_j t_j + h_j, \qquad j = 1:n, \\ u_j, t_j \in [\varepsilon,\ \mathrm{N}],\ \ P_0 \in [\varepsilon,\ 1\text{-}\varepsilon]. \end{cases}$$

4 Метод решения минимаксной и максиминной задач в виде задачи НЛП

Рассмотрим общую задачу нелинейного программирования

$$\inf_{x\in R^n} f(x) \,|\, g_i(x) \le 0,\ \ i = 1:m;\ g_i(x) = 0,\ \ i = m+1:s;\ x\in U_0 \subset R^n,$$

где $x \in R^n$ – вектор оптимизируемых переменных, $f(x)$ – скалярная дифференцируемая целевая функция векторного аргумента $f(x): R^n \to R$, $g_i(x)$ – также некоторые скалярные дифференцируемые функции векторного аргумента.

Для решения таких задач эффективным методом считается применение уравнений Куна-Таккера, которые на основании приведённой формулировки задачи НЛП и при некоторых дополнительных предположениях о характере ограничений записываются в виде

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0,$$

$$\nabla g_i(x^*) = 0,\ i = m+1:s;$$

$$\lambda_i^* = 0, \quad i = 1:m;$$

где λ_i – множители Лагранжа.

Для решения таких задач эффективным методом является алгоритм последовательного квадратичного программирования − Sequential Quadratic Programming (SQP), представляющий собой, по сути, разновидность квазиньютоновского метода. Основная идея SQP заключается в применении квадратичной аппроксимации функции Лагранжа, так что на каждой итерации решается задача оптимизации

$$\frac{1}{2}d^T H_k d + \nabla f^T(x_k)d \to \inf_{d \in R^n},$$
$$\nabla g_i^T(x_k)d + g_i(x_k) \le 0, \quad i = 1:m;$$
$$\nabla g_i^T(x_k)d + g_i(x_k) = 0, \quad i = m+1:s;$$

где H – симметрическая и положительно определённая матрица вторых частных и смешанных производных (матрица Гессе, или гессиан). Ньютоновские алгоритмы (в отличие от квазиньютоновских) непосредственно вычисляют H (прямое вычисление матрицы H требует больших вычислительных затрат) и осуществляют движение в рассчитанном на очередной итерации направлении уменьшения целевой функции до достижения минимума (с использованием методов одномерного поиска). В квазиньютоновских алгоритмах такое вычисление не производится, а используется некоторая аппроксимация H. Эти методы являются весьма эффективными потому, что они сочетают высокую скорость сходимости с невысокой трудоёмкостью итерации.

Для последней формулировки представляется целесообразным использование комбинированного алгоритма объединяющего метод BFGS [3, С. 92] и так называемого метода проекций [4, С. 384]. В методе BFGS аппроксимация H производится итерационно, по формуле

$$H_{k+1} = H_k + \frac{q_k q_k^T}{q_k^T s_k} - \frac{H_k s_k s_k^T H_k}{s_k^T H_k s_k}, \quad \text{где} \quad \begin{aligned} s_k &= x_{k+1} - x_k, \\ q_k &= \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k). \end{aligned}$$

Литература

1. The Owner's Role in Project Risk Management. Washington, D.C.: The National Academies Press, 2005.
2. *Топка В.В.* Минимизация времени и стоимости с учетом показателя надежности в дизъюнктивной модели проекта // А и Т. 2012. №7. С. 78- 88.
3. *Измаилов А.Ф., Солодов М.В.* Численные методы оптимизации: Учеб. пособие. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
4. *Дьяконов В., Круглов В.* Математические пакеты расширения MATLAB. Специальный справочник. СПб.: Питер, 2001.