АВТОМАТНЫЕ И РЕКУРРЕНТНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ

Епифанов А.С.

Институт проблем точной механики и управления РАН,
Россия, г. Саратов, ул. Рабочая д.24
EpifanovAS@list.ru

Аннотация: В работе рассматриваются математические модели дискретных систем, представленные в форме автоматных моделей. В качестве способа задания автоматных моделей используется аппарат геометрических образов автоматных отображений, предложенный и разработанный В.А.Твердохлебовым и позволяющий задавать законы функционирования автоматов геометрическими кривыми и числовыми последовательностями.

Ключевые слова: дискретная система, математическая модель, автоматная модель системы, рекуррентная форма.

Введение

В классе дискретных детерминированных динамических систем конечные детерминированные автоматы образуют простейший, но достаточно исследованный подкласс. Развитые методы анализа, синтеза, распознавания и т.п. конечных детерминированных автоматов эффективно применяются в решении прикладных задач для реальных систем, автоматные модели которых явно задаются таблицами, матрицами, графами, логическими уравнениями и др. В связи с развитием областей приложения теории автоматов оказалось, что для реальных систем большой размерности задание автоматных моделей таблицами, матрицами, графами, логическими уравнениями практически не эффективно. Одним из путей расширения области приложения теории автоматов явились исследования профессора В.А.Твердохлебова, в которых, начиная с 1993г., рассматривается представление законов функционирования автоматов, заданных дискретными символьными функциями переходов и выходов, непрерывными числовыми структурами (см., например, [1,3,4]). Для этого автоматное отображение полагается множеством точек с числовыми координатами и законы функционирования представляются ломаными линиями, вершины которых расположены на аналитически заданных кривых. Этот подход к заданию автоматов, а также некоторые методы анализа, синтеза и распознавания автоматов по их геометрическим образам используются и развиваются в дальнейшем.

В данной работе рассматриваются задачи из общей проблемы распознавания конечных детерминированных автоматов по свойствам и признакам их функционирования, включая оценку сложности законов функционирования автоматов. Для представления законов функционирования автоматных моделей систем используется аппарат геометрических образов (позволяющий задавать автоматы геометрическими кривыми и числовыми последовательностями), а в качестве математического аппарата, позволяющего осуществлять построение формальных характеристик сложности автоматных моделей используется спектр динамических характеристик рекуррентного определения последовательностей (предложен и разработан В.А.Твердохлебовым, см.[2]).

1 Краткое описание аппарата геометрических образов автоматов

Преобразование символьной формы автоматной модели в числовую структуру (геометрический образ законов функционирования автомата) включает линейное упорядочивание автоматного отображения $\rho_s = \bigcup_{p\in X^*}\{(p,\lambda(s,p))\}$, для инициального автомата $A_s=(S, X, Y, \delta, \lambda, s)$, где S, X и Y – соответственно множества состояний, входных и выходных сигналов, а δ: $S\times X\to S$ – функция переходов, λ: $S\times X\to Y$ – функция выходов. Автоматное отображение ρ_s взаимнооднозначно преобразуется в автоматное отображение вида $\rho'_s = \bigcup_{p\in X^*}\{(p,\lambda'(s,p))\}$, где $\lambda'(s, p)$ – последний знак последовательности $\lambda(s, p)$. Из геометрического образа γ_s автомата A_s выделяется последовательность вторых координат точек геометрического образа, которая взаимнооднозначно соответствует полному геометрическому образу (при фиксированных порядке на множестве X^* и величине $m=|X|$). В результате законы функционирования автомата (то есть, фазовая картина) и конкретные процессы функционирования автомата (то есть, фазовые траектории) оказываются взаимнооднозначно определёнными последовательностью вторых координат точек геометрического образа. Это позволяет рассматривать произвольную последовательность элементов из конечного множества как последовательность вторых координат точек геометрического образа и, следовательно, как задание законов функционирования автомата, и, таким образом, проводить анализ законов функционирования автоматных моделей систем на основе анализа числовых последовательностей с интерпретацией их как последовательностей вторых координат точек геометрических образов автоматов. Для этого множеством состояний автомата полагается подмножество множества $\{s_p\}_{p\in X^*}$ и функция δ определяется равенством: $\delta(s_p,x)=s_{px}$ для любых $p\in X^*$ и $x\in X$. Каждая имеющаяся в геометрическом образе автомата точка (px, y), где $p\in X^*, x\in X$ и $y\in Y$, определяет равенство $\lambda(s_p,x)=y$. Переход от символьных координат точек геометрического образа к числовым координатам позволяет размещать геометрические образы законов функционирования автомата на числовых кривых.

2 Спектр динамических характеристик рекуррентного определения последовательностей

Пусть $U=\{u_1,u_2,...,u_k\}$ - конечное множество и ξ последовательность элементов из множества U: $\xi=\langle u(1),u(2),...,u(t),...\rangle$. Спектр $\Omega(\xi)$ динамических характеристик последовательности $\xi\in U^*\cup U^\infty$ имеет иерархическую структуру, состоящую из уровней $\Omega(\xi) = (\Omega_1(\xi), \Omega_2(\xi), \Omega_3(\xi), \Omega_4(\xi))$.

<u>Определение 1.</u> Для любой последовательности $\bar\xi\in U^\vee$ наименьший порядок рекуррентной формы, определяющей последовательность $\bar\xi$, будем обозначать $m_0(\bar\xi)$.

<u>Определение 2.</u> Для любой последовательности $\bar\xi\in U^\vee$ и $m\in N^+$, где $1\le m\le m_0(\bar\xi)$, наибольшую длину начального отрезка последовательности $\bar\xi$, определяемого рекуррентной формой порядка m, будем обозначать $d^m(\bar\xi)$.

<u>Определение 3.</u> Для любой последовательности $\bar\xi\in U^\vee$ и $m\in N^+$, где $1\le m\le|\bar\xi|-1$, число смен рекуррентных форм порядка m, требующихся при определении последовательности $\bar\xi$, будем обозначать $r^m(\bar\xi)$.

Определение 4. Для любой последовательности $\bar{\xi} \in U^{\nu}$ и $m \in N^{+}$, где $1 \le m \le m_0(\bar{\xi})$ и j, где $1 \le j \le r^m(\bar{\xi})$ длину j-го отрезка в определении последовательности $\bar{\xi}$ будем обозначать $d_j^m(\bar{\xi})$.

Используя введенные обозначения определим спектр параметров, характеризующих последовательность, как следующую структуру: $\Omega_0(\bar{\xi}) = \langle\, m_0(\bar{\xi}) \,\rangle$; $\Omega_1(\bar{\xi}) = \langle\, d^1(\bar{\xi}), d^2(\bar{\xi}), \ldots, d^{\alpha}(\bar{\xi}) \,\rangle$ $\Omega_2(\bar{\xi}) = \langle r^1(\bar{\xi}), r^2(\bar{\xi}), \ldots, r^{\alpha}(\bar{\xi}) \rangle$; $\Omega_3(\bar{\xi}) = \langle\, \Omega_3^1(\bar{\xi}), \Omega_3^2(\bar{\xi}), \ldots, \Omega_3^{\alpha}(\bar{\xi}) \,\rangle$, где $\alpha = m_0(\bar{\xi})$ и $\Omega_3^j(\bar{\xi}) = \langle\, d_1^j(\bar{\xi}), d_2^j(\bar{\xi}), \ldots, d_{n_j}^j(\bar{\xi}) \,\rangle$ (n_j – номер последнего отрезка в определении последовательности $\bar{\xi}$ как последовательности отрезков, определяемых отдельными рекуррентными формами порядка j); - $\Omega_4(\bar{\xi}) = \Theta(\Omega_3(\bar{\xi}))$, где Θ - оператор замены в $\Omega_3(\bar{\xi})$ величин длин отрезков весами использованных рекуррентных форм для определения отрезков.

3 Оценки сложности автоматных моделей систем

Среди различных подходов к оценке сложности процессов, алгоритмов, законов функционирования автоматов и реализаций этих законов для исследования выбран подход, при котором используется геометрическое представление поведения автоматов. Рекуррентное описание последовательностей дает полную и глубокую характеристику взаиморасположения элементов в последовательности: определяет функциональную зависимость элемента последовательности от непосредственно предшествующей ему подпоследовательности элементов. Числовым показателем при рекуррентном определении последовательности является длина однозначно сопоставляемой элементу предшествующей подпоследовательности. На основе этих свойств определения последовательности рекуррентными формами Твердохлебовым В.А. [2] предложены 5 уровней спектра (см.раздел 2). Проведено исследование, в котором спектр используется как средство для оценки сложности автоматных моделей систем, заданных в форме числовых последовательностей. Для иллюстрации описанного подхода к оценке сложности автоматных моделей систем в качестве последовательностей, определяющих законы функционирования автоматов, рассмотрены и исследованы последовательности длины до 10 млн. знаков, включая последовательности, задающие приближения известных математических констант π, e, $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (т.н. золотое сечение), $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, ln(2), ln(10), $\zeta(3) = \sum_{x=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^3}$, константа Каталана $C = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1^n)}{(2n+1)^2}$, константа Эйлера $\gamma = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)))$ и др. Введем следующие обозначения: H={e , π , φ , $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $ln(2)$, $ln(10)$, $\zeta(3)$, C, γ}, H_d – множество начальных отрезков длины d последовательностей, определяющих элементы множества H, а $\alpha_d^m(H_d) = \{\ A_d^m(e), A_d^m(\pi), A_d^m(\varphi), A_d^m(\sqrt{2}), A_d^m(\sqrt[3]{2}), A_d^m(ln(2)), A_d^m(ln(10)),\ A_d^m(\zeta(3)), A_d^m(C), A_d^m(\gamma)\ \}$, где $A_d^m(\beta)$, $\beta \in H_d$, - дискретный детерминированный автомат с числом входных сигналов m и β является последовательностью вторых координат точек геометрического образа автомата. Для проведения исследований были разработаны алгоритмы и программы, позволившие построить указанные спектры для рассмотренных последовательностей. Результаты систематизированы в виде лемм и в явном виде (ввиду ограничений на объем статьи) приведены для случаев d=500000 и d=1000000 в виде лемм 1 и 2.

Лемма 1. Законы функционирования автоматов из $\alpha^m(H_d)$, где d=500000, по сложности:

- определяемой нулевым уровнем Ω0 спектра Ω образуют 2 класса эквивалентности по сложности: $\{A_d^m(\pi), A_d^m(\sqrt{2}),\ A_d^m(\ln(2))\}$ и $\{A_d^m(e), A_d^m(\varphi),\ A_d^m(\sqrt[3]{2}),\ A_d^m(\ln(10)), A_d^m(\zeta(3)), A_d^m(C), A_d^m(\gamma)\}$;
- определяемой первым уровнем Ω_1 спектра Ω образуют одноэлементные классы эквивалентности по сложности. (Док-во см.[5]).

Лемма 2. Законы функционирования автоматов из $\alpha^z(H_d)$, где d=1000000:

- по сложности, определяемой нулевым уровнем Ω_0 спектра Ω образуют 2 класса эквивалентности по сложности: $\{A_d^z(e), A_d^z(\pi), A_d^z(\varphi), A_d^z(\sqrt[3]{2}),\ A_d^z(\zeta(3))\}$ и $\{A_d^z(\sqrt{2}),\ A_d^z(\ln(2)), A_d^z(\ln(10)), A_d^z(C), A_d^z(\gamma)\}$;
- по сложности, определяемой первым уровнем Ω_1 спектра Ω образуют одноэлементные классы эквивалентности по сложности. (Док-во см.[5]).

Заключение

Изложенные результаты показывают возможность практического использования аппарата геометрических образов автоматов и спектра динамических характеристик рекуррентного определения последовательностей для определения свойств законов функционирования дискретных детерминированных динамических систем на основе исследования свойств числовых последовательностей, взаимно-однозначно определяющих законы функционирования. Построены конкретные примеры оценок, определены эквивалентные по показателям спектра последовательности, т.е. эквивалентные по сложности законы функционирования автоматов.

Литература

1. *Твердохлебов В.А.* Геометрические образы конечных детерминированных автоматов // Известия саратовского университета (Новая серия). Том 5. Вып.1. 2005. С.141-153.
2. *Твердохлебов В.А.* Оценка сложности управления движением по известному маршруту. // Ж-л «Проблемы управления». М. №5 2009. С.69-73.
3. *Твердохлебов В.А.* Геометрические образы законов функционирования автоматов.– Саратов: Изд-во «Научная книга», 2008. – 183с.
4. *Твердохлебов В.А., Епифанов А.С.* Представление автоматных отображений геометрическими структурами. – Саратов: Изд-во «Наука», 2013. – 204с.
5. *Епифанов А.С.* Модели и методы анализа и доопределения законов функционирования дискретных динамических систем. – Саратов: Изд-во «Наука», 2014. – 268с.