УПРАВЛЕНИЕ РИСКАМИ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Горелов М.А

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН, Россия, г. Москва ул. Вавилова д.40

griefer@ccas.ru

Аннотация: Исследуются две иерархических игры со случайными факторами, в которых игрок верхнего уровня помимо выбора своего управления выбирает еще и приемлемую для него степень риска. Приводится и анализируется определение максимального гарантированного результата в предположении доброжелательности игрока нижнего уровня. Предлагается три содержательных интерпретации изучаемых моделей.

Ключевые слова: информационная теория иерархических систем, максимальный гарантированный результат в игре с доброжелательным игроком, принцип Value at Risk.

Введение

Данный доклад посвящен исследованию иерархической игры двух лиц со случайным фактором. Подобные модели начали активно исследоваться в 70-х годах прошлого века практически одновременно и независимо в теории иерархических игр, теории активных систем и теории контрактов (обзоры полученных результатов и дальнейшие ссылки можно найти в [1 - 3]). Практически во всех работах, посвященных исследованию такого рода моделей, делается одно предположение: игрок верхнего уровня предполагается риск-нейтральным.

В данном докладе это предположение заменяется принципом Value at Risk. Смысл соответствующих конструкций таков. Фиксируется некое число $\xi\in[0,1]$. В множестве A значений случайного фактора выбирается подмножество B, мера которого не меньше заданного числа ξ, и значения случайного фактора, не принадлежащие B исключаются из рассмотрения. А далее игрок верхнего уровня предполагается осторожным.

Этот принцип достаточно популярен среди экономистов (см. [4]) но в теоретико-игровых моделях до недавнего времени не использовался. Исследование таких моделей было начато в [5].

В [5] предполагалось, что игрок верхнего уровня осторожен по отношению к рациональным выборам второго игрока. В данном докладе делается иное предположение: игрок нижнего уровня предполагается доброжелательным к своему партнеру. Такой принцип оптимальности тоже достаточно широко распространен (иногда его называют равновесием Штакельберга).

Однако есть одна проблема. Традиционное определение математически корректно только в том случае, когда в рассматриваемой игре при любой фиксированной стратегии игрока верхнего уровня максимум выигрыша его партнера непременно достигается. Альтернативное определение подобного принципа оптимальности было впервые предложено в [6].

В докладе исследуются две модели описанного типа. В обеих предполагается, что игрок верхнего уровня обладает правом первого хода. В одной из них предполагается, что выбирая решение, игрок верхнего уровня не имеет информации о выборе партнера. В другой считается, что игрок верхнего уровня в момент окончательного выбора своего управления точно знает выбор второго игрока. В обеих моделях предполагается, что игрок нижнего уровня в момент принятия решения знает реализовавшееся значение случайного фактора, а игроку верхнего уровня известна только вероятностная мера на множестве его возможных значений.

1 Игры со случайными факторами

Игрой со случайными факторами в дальнейшем будем называть шестерку $\Gamma = \langle U, V, A, g, h, \wp\rangle$. Здесь U, V и A – множества, g – функция, отображающая декартово произведение $U \times V$ в множество действительных чисел $\mathbf{R}$, h: $U \times V \times A \to \mathbf{R}$, а $\wp$ – вероятностная мера на множестве A.

Интерпретируются эти конструкции следующим образом. Предполагается, что в игреимеются два участника, которых будем называть первым и вторым игроками. Множество U интерпретируется как множество управлений первого игрока, множество V – как множество управлений его партнера. Будем полагать, что интересы первого и второго игроков описываются стремлением к максимизации функций g и h соответственно. Значение неопределенного фактора $\alpha \in A$ выбирается Природой в соответствии с распределением $\wp$.

Сделаем следующие технические предположения. Множества U, V и A будем считать наделенными топологиями и компактными. Функции g и h будем предполагать непрерывными. Меру $\wp$ будем считать борелевской.

Рассмотрим другую игру $\Gamma_* = \langle U_*, V_*, A, g_*, h_*, \wp\rangle$, определенным образом связанную с игрой Г.

Обозначим через $\Phi(X,Y)$ класс всех функций из множества X в множество Y. Пусть $U_* = \Phi(V \times A, U)$, $V_* = V \times A$, а функции g_* и h_* определяются условиями $g_*(u_*,v_*) = g(u_*(v,\beta),v)$, $h_*(u_*,v_*,\alpha) = h(u_*(v,\beta),v,\alpha)$, где $v_* = (v,\beta)$. Множество A и мера $\wp$ на нем те же, что и в игре Г.

Интерпретировать эти конструкции можно следующим образом. Игроки выбирают свои «физические» управления из множеств U и V. Но к моменту выбора своего управления $u \in U$ первый игрок получает достоверную информацию об управлении $v \in V$, выбранном его партнером. Кроме того, второй игрок может передать первому информацию о реализации неопределенного фактора. Однако эта информация не обязана быть достоверной, то есть второй игрок вправе выбрать некоторое сообщение $\beta \in A$, которое он передаст партнеру. Свое физическое управление $u_*(v,\beta)$ первый игрок выбирает на основе всей полученной информации, а выигрыши обоих игроков зависят лишь от сделанных ими физических выборов.

2 Гарантированный результат в играх с доброжелательным вторым игроком

Начнем с интерпретации.

Считаем, что все параметры игры Г точно известны первому игроку. Будем предполагать, что события разворачиваются следующим образом. Вначале первый игрок выбирает свое управление $u \in U$. Затем реализуется конкретное значение неопределенного фактора $\alpha \in A$ (в соответствии с заданной вероятностной мерой $\wp$). Значения u и α становятся известными второму игроку. Таким образом, для второго игрока никакой неопределенности не остается. Если функция выигрыша h действительно описывает интересы второго игрока, то он выберет управление, максимизирующее значение этой функции при заданных значениях u и α. В дополнение к этому будем считать, что второй игрок доброжелателен к партнеру, т. е. если точек максимума его функции выигрыша несколько, то он выберет ту из них, которая предпочтительнее для первого игрока. Такой принцип поведения известен первому игроку. Но поскольку значение α первому игроку не известно, для него этот результат является случайной величиной. Отношение первого игрока к этой неопределенности следующее. Он согласен исключить из рассмотрения некоторое число «форсмажорных» событий, суммарная вероятность которых меньше заданной величины $1 - \xi$. А в остальном он ориентируется на наихудший для себя случай и хочет получить максимальный гарантированный результат.

Определение 1. Пусть задано число $\xi\in[0,1]$. Число γ является ξ-гарантированным результатом первого игрока в игре Г с доброжелательным вторым игроком, если существуют измеримое множество $B \subset A$, мера $\wp(B)$ которого больше или равна ξ, и такая стратегия $u \in U$, что для любого $\alpha \in B$ найдется число λ, для которого выполняются следующие условия:

1°. существует $w \in V$, для которого $h(u,w,\alpha) \geq \lambda$ и $g(u,v) \geq \gamma$;

2°. для любого $v \in V$ либо $g(u,v) \geq \gamma$, либо $h(u,v,\alpha) \leq \lambda$.

Точная верхняя грань $R(\Gamma)$ всех ξ-гарантированных результатов первого игрока называется его максимальным ξ-гарантированным результатом в игре с доброжелательностью.

3 Интерпретации

Методологическая. Наиболее оправданным методологически является принцип максимального гарантированного результата. И на практике он используется очень часто. Но принцип максимального гарантированного результата имеет одну не очень привлекательную сторону. Если проводить его совсем уж последовательно, то нельзя исключать возможность того, что игроку «не свалится на голову кирпич» или не произойдет еще что-то столь же неприятное. А постоянно ориентируясь на такого рода случаи, вряд ли можно принимать эффективные решения.

На практике, да и в теории [6], из этой ситуации используется следующий выход. Часть совсем уж «фатальных» значений неопределенного фактора исключается из рассмотрения, а по отношению к оставшейся части используется принцип максимального гарантированного результата. На каком же основании некоторые возможности исключаются из рассмотрения? Видимо потому, что оперирующая сторона считает их «маловероятными».

Управление рисками. Величину $1 - \xi$ в данной модели естественно рассматривать как меру риска. Таким образом, в модели явно описываются как «доходность», оцениваемая величиной выигрыша g(u,v), так и риск. Это представляется достаточно важным.

Вполне естественно предположить, что величина ξ является управлением оперирующей стороны (первого игрока), наряду с u. Можно предполагать, что порядок принятия решений является следующим. Вначале первый игрок фиксирует ξ и u (или u* и ξ соответственно), затем реализуется значение неопределенного фактора α, потом свое управление выбирает второй игрок.

Захват рынка. Предположим, первый игрок – это фирма, оказывающая какие-то услуги (банк, телефонная компания и т.п.). Имеется некоторое множество потенциальных потребителей этих услуг. Но разные потребители могут иметь несовпадающие интересы. Можно интерпретировать параметр $\alpha \in A$ как тип потребителя, считая, что интересы потребителя типа α описываются стремлением к максимизации значения функции $h(u,w,\alpha)$. Мера $\wp$ описывает распределение потребителей по типам: потребители одного типа могут встречаться чаще, потребители другого – реже.

Вполне разумной представляется следующая постановка задачи управления фирмой: требуется охватить заданную долю рынка, а от каждого своего клиента получить максимальный возможный результат. При этом вполне естественно считать, что все потенциальные потребители получают от фирмы одно и то же предложение, не зависящее от их типов

4 Игра без обратной связи

Займемся вычислением величины $R(\Gamma)$ при сделанных в первом параграфе предположениях топологического характера.

Введем обозначение. $$BR(u,\alpha) = \left\{ v \in V : h(u,v,\alpha) = \max_{w \in V} h(u,w,\alpha) \right\}$$

Пусть $\theta(x) = 1$ при $x \geq 0$ и $\theta(x) = 0$, если $x < 0$.

Теорема 1. Для того, чтобы число γ было ξ-гарантированным результатом первого игрока в игре Г, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\max_{u \in U} \mathrm{M}\theta\left(\min_{v \in BR(u,\alpha)} g(u,v) - \gamma \right) \geq \xi$.

5 Игра с обратной связью

Обратимся к вычислению максимального гарантированного результата $R(\Gamma_*)$ для наделенной дополнительной структурой игры $\Gamma_* = \langle U_*, V_*, A, g_*, h_*, \wp \rangle$, описанной в параграфе 1. Для этого потребуется одно дополнительное предположение.

Гипотеза 1. Функция h такова, что существует такое управление $u^p \in U$, что для любого $v \in V$ и любого $\alpha \in A$ выполняется равенство $h(u^p, v, \alpha) = \min_{u \in U} h(u,v,\alpha)$.

Обозначим $E(\gamma) = \left\{ v \in V : \max_{u \in U} g(u,v) < \gamma \right\}$.

Теорема 2. Пусть гипотеза 1 верна. Тогда для того, чтобы число γ было ξ-гарантированным результатом в игре Γ_* необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{M}\theta\left(\inf_{v \in E(\gamma)} \max_{u \in U} \left(l(\alpha,\gamma) - h(u,v,\alpha) \right) \right) \geq \xi$.

Можно заменить гипотезу 1 следующим предположением.

Гипотеза 2. Существует такое управление $u \in U$, что неравенство $\max_{v \in V} h(u,v,\alpha) < l(\alpha,\gamma)$ выполняется для всех $\alpha \in A$.

Литература

1. *Горелик В.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф.* Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. – М.: Радио и связь, 1991. – 287 с.

2. *Бурков В.Н., Новиков Д.А.* Теория активных систем: состояние и перспективы. – М.: Синтег, 1999. – 128 с.

3. *Bolton P., Dewatripont M.* Contract Theory. – Mass.: MIT Press, 2005. – 740 p.
4. *Dempster M.A.H. (ed.)* Risk Management. Value at Risk and Beyond. – Cambridge: Cambridge University Press, 2002. – 290 p.
5. *Горелов М.А.* Принцип «Value at Risk» в иерархической игре // Управление большими системами. Вып. 72. М.: ИПУ РАН, 2018. С. 6 - 26.
6. *Горелов М.А.* Максимальный гарантированный результат в иерархических играх // Управление большими системами. Вып. 67. М.: ИПУ РАН, 2017. С. 4 - 31.

о

–