ОПЦИОННАЯ МОДИФИКАЦИЯ СЦЕНАРНОГО АЛГОРИТМА ОПТИМИЗАЦИИ ПО CC-VAR[45]

Агасандян Г.А.

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, г. Москва

agasand17@yandex.ru

Аннотация. *В рамках проблем применения континуального критерия VaR (CC-VaR) на финансовых рынках предлагается адаптация континуального алгоритма построения оптимального портфеля к опционному рынку. Дискретный алгоритм получается простым проецированием теоретического алгоритма, разработанного ранее для идеального однопериодного рынка с одним базовым активом, с заменой сценарных базисных инструментов простейшими нормированными баттерфляями. Приводится также расширенная версия алгоритма для базиса из элементарных инструментов – линейных комбинаций базисных баттерфляев. В качестве элементарных естественно использовать инструменты, непосредственно котирующиеся на рынке. Обсуждаются варианты выбора таких базисов и то, как при этом избежать проблемных базисов.*

Ключевые слова: континуальный критерий VaR, сценарный рынок, алгоритм оптимизации, процедура Неймана-Пирсона, доход, инвестиционная сумма.

Введение

Проблемы применения континуального критерия VaR (CC-VaR) на теоретическом идеальном однопериодном рынке с одним базовым активом рассматривались в [1-4]. Однако основные приложения методологии CC-VaR связаны с дискретными рынками – сценарным и дискретным по страйкам рынках опционов. Здесь излагается адаптация континуального алгоритма оптимизации к опционному рынку. Напомним конструкцию сценарного рынка и его основные инструменты.

Теоретической моделью рынка, на котором инвестор находит адекватное (точное) отражение своих рисковых предпочтений, встроенных в CC-VaR, служит δ-рынок. Обозначаем через $\mathsf{X} = [a, b)$ множество цен базового актива. Заданы стоимостная $c(x)$ и прогнозная $p(x)$ плотности, $x \in \mathsf{X}$, определяющие меры $\mathsf{C}\{\cdot\}$ и $\mathsf{P}\{\cdot\}$ соответственно. Сценарная дискретизация теоретического рынка определяется равномерным (для простоты) разбиением множества X на n сценариев $S_i \subset \mathsf{X}$, $i \in I = \{1, 2,\ldots, n\}$, $S_i \cap S_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\mathsf{X} = \cup_{i\in I} S_i$, $S_i = [x_{i-1}, x_i)$, $x_0 = a$, $x_i = a + ih$, $h = (b - a)/n$, $i \in I$. Цена инструмента $\boldsymbol{G}$ обозначается $|\boldsymbol{G}|$, средний доход – $\|\boldsymbol{G}\|$.

На сценарном рынке базисными инструментами служат дискретные аналоги инструментов $\boldsymbol{D}(s)$ теоретического рынка – индикаторы сценариев $\boldsymbol{D}_i = \boldsymbol{H}\{S_i\}$, $i \in I$; при этом $\sum_{i\in I} \boldsymbol{D}_i = \boldsymbol{U}$. Их платежные функции $\pi(x; \boldsymbol{D}_i) = \chi_i(x)$, где $\chi_i(x)$ – характеристическая функция множества S_i, равная единице при $x \in S_i$ и нулю при $x \notin S_i$. *Рыночные цены* индикаторов и *прогнозные вероятности* сценариев образуют векторы $\boldsymbol{c}^S \equiv \{c_i^S, i \in I\}$ и $\boldsymbol{p}^S \equiv \{p_i^S, i \in I\}$, где

$$(1)\quad c_i^S = |\boldsymbol{D}_i| = \int_{x_{i-1}}^{x_i} c(x)dx = \int_{\mathsf{X}} \chi_i(x)c(x)dx, \quad p_i^S = \|\boldsymbol{D}_i\| = \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)dx = \int_{\mathsf{X}} \chi_i(x)p(x)dx, \quad i \in I.$$

Произвольный вектор доходов $\boldsymbol{g} = \{g_1, g_2,\ldots, g_n\}$ реализуется портфелем базисных инструментов $\boldsymbol{G} = \sum_{i\in I} g_i \boldsymbol{D}_i$. Его рыночная цена $|\boldsymbol{G}| = \sum_{i\in I} g_i c_i$, а средний доход – $\|\boldsymbol{G}\| = \sum_{i\in I} g_i p_i$.

Общая часть дискретного алгоритма оптимизации формируется простым проецированием континуального алгоритма на сценарный рынок. А для его адаптации к рынку опционов напрашивается простая замена сценарного базиса базисом из нормированных простейших баттерфляев. Такая замена представляет самостоятельный интерес, но она может быть и вынужденной, если на дискретном рынке отсутствуют инструментальные индикаторы сценариев.

Базисы из баттерфляев и их цены

На дискретном по страйкам рынке опционов страйками возможных коллов и путов становятся центры сценариев $s_i = (x_{i-1} + x_i)/2 = a + h(i - 1/2)$, $i \in I$. Расстояние между соседними страйками равно h. Полагаем еще $s_0 = a$, $s_{n+1} = b$, но эти параметры страйками не являются.

[45] *Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 17-01-00816).*

Сценарные базисные инструменты $\boldsymbol{D}_i$, $i = 2..n-1$, заменяются простейшими нормированными баттерфляями, но для крайних страйков с $i = 1, n$ – простейшими нормированными спрэдами. Если использовать только коллы $\boldsymbol{C}_i \equiv \boldsymbol{C}(s_i)$, $i \in I$, то имеем *канонический* базис

(2) $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{M} + (\boldsymbol{C}_2 - \boldsymbol{C}_1)/h, \quad \boldsymbol{B}_i = (\boldsymbol{C}_{i-1} - 2\boldsymbol{C}_i + \boldsymbol{C}_{i+1})/h, \quad \boldsymbol{B}_n = (\boldsymbol{C}_{n-1} - \boldsymbol{C}_n)/h.$

Обозначению $\boldsymbol{M}$ отвечает единичный маржевый инструмент с $\pi(x; \boldsymbol{M}) \equiv \pi(x; \boldsymbol{U}) \equiv 1$. Вместо коллов можно использовать путы, и тогда

$\boldsymbol{B}_1 = (\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1)/h, \quad \boldsymbol{B}_i = (\boldsymbol{P}_{i-1} - 2\boldsymbol{P}_i + \boldsymbol{P}_{i+1})/h, \quad i = 2..n, \quad \boldsymbol{B}_n = \boldsymbol{M} + (\boldsymbol{P}_{n-1} - \boldsymbol{P}_n)/h.$

Внутренние страйки допускают и разные смешанные представления. Чаще всего используется так называемое представление естественного происхождения:

$\boldsymbol{B}_i = \boldsymbol{M} + (\boldsymbol{P}_{i-1} - \boldsymbol{P}_i - \boldsymbol{C}_i + \boldsymbol{C}_{i+1})/h, \quad i = 2..n.$

Для каждого $i \in I$ интегралы от платежных функций для сценарных и опционных базисных инструментов совпадают. Кроме того, $\sum_{i\in I}\boldsymbol{D}_i = \sum_{i\in I}\boldsymbol{B}_i = \boldsymbol{U}$.

Вектор цен базисных баттерфляев обозначаем $\boldsymbol{c}^B$. На реальном рынке вектор $\boldsymbol{c}^B$ получается из цен торгуемых на рынке опционов. В нашей теоретической модели проще получать эти цены интегрированием плотности $c(x)$ с подходящими весовыми функциями, равными платежным функциям $\beta_i(x) \equiv \pi(x; \boldsymbol{B}_i)$, $i \in I$. Аналогично будем находить вектор средних доходов $\boldsymbol{p}^B$. Имеем:

(3) $$c_i^B = |\boldsymbol{B}_i| = \mathsf{E}_\mathsf{C}\beta_i(\xi) = \int_\mathsf{X}\beta_i(x)c(x)dx, \quad p_i^B = \|\boldsymbol{B}_i\| = \mathsf{E}_\mathsf{P}\beta_i(\xi) = \int_\mathsf{X}\beta_i(x)p(x)dx, \quad i \in I,$$

$$\beta_i(x) = \max\left(0, 1 - |s_i - x|/h\right), \quad i = 2..n-1,$$

$$\beta_1(x) = \max\left(0, \min\left(1, 1 + (s_1 - x)/h\right)\right), \quad \beta_n(x) = \max\left(0, \min\left(1, 1 - (s_n - x)/h\right)\right).$$

При этом опционный портфель получается заменой базисных инструментов $\boldsymbol{D}_i$ инструментами $\boldsymbol{B}_i$ с сохранением их весов в портфеле. В связи с введением в дополнение к $\boldsymbol{c}^S$ и $\boldsymbol{p}^S$ (1) новых векторов $\boldsymbol{c}^B$ и $\boldsymbol{p}^B$ наиболее предпочтительным представляется вариант алгоритма с векторами $\boldsymbol{c}^B$ и $\boldsymbol{p}^B$, но с назначением весов посредством вектора $\boldsymbol{p}^S$.

Расширенный алгоритм для базиса из элементарных инструментов

Под *элементарными* инструментами понимаются произвольные линейные комбинации сценарных инструментов, т.е. инструменты, платежные функции которых принимают постоянные значения в пределах каждого сценария. Для их содержательной интерпретации имеет смысл в качестве *элементарных* использовать инструменты, непосредственно котирующиеся на рынке. Базис должен содержать ровно n таких инструментов и трансформироваться подходящим линейным оператором в сценарный базис. Упорядочение сценариев, как обычно с CC-VaR, основано на последовательном применении процедуры Неймана-Пирсона из математической статистики [6].

Расширенный алгоритм построения оптимального портфеля (в перечне операций $i, j \in I = \{1, 2,\ldots, n\}$, а под $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{p}$ здесь понимаются векторы $\boldsymbol{c}^S$ и $\boldsymbol{p}^S$ (1) соответственно, но для целей следующего раздела $\boldsymbol{c}^B$ и $\boldsymbol{p}^B$ **Ошибка! Источник ссылки не найден.**):

$\hat{\boldsymbol{s}} \equiv \{\hat{s}_i\}$ – вектор элементарных инструментов;

$\boldsymbol{m} \equiv \{m_i\}$, $m_i = |\hat{s}_i|$ – рыночная стоимость i-го инструмента;

$\mathbf{Y} \equiv [y_{ij}]$ – матрица доходов, $y_{ij} = \hat{s}_i(j)$ – доход от i-го инструмента на j-м сценарии; для канонического базиса $\mathbf{Y} = \mathbf{I}$;

$\hat{w} \equiv \sum_{i\in I}w_i\hat{s}_i \equiv (\boldsymbol{w}, \hat{\boldsymbol{s}})$ – портфель элементарных ценных бумаг;

$\hat{w}(j) = \sum_i w_i\hat{s}_i(j) = \sum_i w_i y_{ij}$ – доход портфеля на j-м сценарии;

$\hat{\boldsymbol{u}} \equiv \{\hat{u}_i\}$ – единичный сценарный базис, $\hat{u}_i(j) = \delta_{ij}$;

$\hat{\boldsymbol{u}} = \mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{s}}$, или $\hat{u}_i = \sum_{j\in I}z_{ij}\hat{s}_j$, где $\mathbf{Z} = \{z_{ij}\}$ – матрица весов в портфелях; возможны постановки задачи сразу с матрицей $\mathbf{Z}$, притом не обязательно квадратной, и без $\mathbf{Y}$;

$\hat{u}_i(j) = \sum_{k\in I}z_{ik}\hat{s}_k(j) = \sum_{k\in I}z_{ik}y_{kj} = \delta_{ij}$ ($\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1}$, в предположении невырожденности матрицы $\mathbf{Y}$);

$\boldsymbol{c} = \mathbf{Z}\boldsymbol{m}$, $c_i = |\hat{u}_i| = \sum_{j\in I}z_{ij}m_j$ – цена i-го сценарного инструмента;

$\sum_{i\in I}\hat{u}_i$ – единичный безрисковый инструмент;

После нахождения векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{c}$ применяется *каноническая часть алгоритма*:

$\boldsymbol{\rho} \equiv \{\rho_i\}$, $\rho_i = p_i/c_i$, – относительный доход для i-го сценария;

$\boldsymbol{\xi} \equiv \{\xi_i\}$, ξ_i – номер сценария с i-м по величине отношением ρ_i;

$\boldsymbol{\Xi} \equiv \{\xi_{ij}\}$, $\xi_{ij} = \{1, j = \xi_i;\ 0, j \neq \xi_i\}$, – матрица упорядочения;

$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{p}^S$ – переупорядоченный (в порядке $\boldsymbol{\xi}$) вектор $\boldsymbol{p}^S$;

$\mathbf{T} \equiv \{t_{ij}\},\ t_{ij} = \{1,\ i \le j;\ 0,\ i > j\},$ – треугольная суммирующая матрица;

$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{T}\boldsymbol{d}$ – кумулятивный вектор вероятностей;

$\boldsymbol{b} = \phi(\boldsymbol{\varepsilon})$ – вектор назначаемых портфельных весов ($\phi(\cdot)$ – функция рисковых предпочтений инвестора, ключевой атрибут CC-VaR [1-5]);

$\hat{g} = (\boldsymbol{g}, \hat{\boldsymbol{u}}),\ \boldsymbol{g} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{\Xi},$ – оптимальный портфель в терминах сценарных базисных инструментов (в каноническом базисе).

Остается вернуться к исходным элементарным инструментам.

Оптимальный портфель и его параметры в терминах элементарных инструментов:

$\hat{g} = (\boldsymbol{g}, \hat{\boldsymbol{u}}) = (\boldsymbol{w}, \hat{\boldsymbol{s}}),\ \boldsymbol{w} = \boldsymbol{g}\mathbf{Z} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{\Xi}\mathbf{Z}$ (в отличие от $\boldsymbol{g}$ компоненты $\boldsymbol{w}$ могут быть отрицательными);

$A = |\hat{g}| = (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{m})$ – стоимость портфеля (инвестиционная сумма);

$R = (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{p})$ – средний доход портфеля;

$r = R/A$ – средний относительный доход портфеля.

Опционная модификация алгоритма

Использование элементарных инструментов более актуально для опционного рынка, на котором в таком качестве могут выступать, например, просто коллы и путы, а вместо $\boldsymbol{D}_i$ – инструменты $\boldsymbol{B}_i,\ i \in I$. Однако на ряд моментов следует обратить внимание.

Платежные функции торгуемых на рынке инструментов не являются, вообще говоря, кусочно-постоянными. Тем не менее можно использовать расширенный алгоритм, если определиться с правилом построения матрицы $\mathbf{Y}$.

Условимся доходы от элементарных инструментов рассчитывать для центров сценариев. При этом платежные функции инструментов $\hat{u}_i$ и $\boldsymbol{B}_i,\ i \in I$, могут различаться. Их равенство гарантируется лишь для соответствующих центров сценариев.

Рассмотрим в качестве примера совокупность $\mathbf{E} = \{\boldsymbol{C}_i,\ i = 1..n\}$ элементарных инструментов – n коллов. Для нее вычисления дают матрицу $\mathbf{Y} = [y_{ij} = \{h(j - i),\ j \ge i;\ 0,\ j < i;\ i,j = 1..n\}]$ и $\det(\mathbf{Y}) = 0$, так как опцион $\boldsymbol{C}_n$ порождает строку матрицы с $y_{nj} \equiv 0,\ j = 1..n$). Следовательно, совокупность $\mathbf{E}$ базисом не является.

Однако подключением актива $\boldsymbol{U}$ можно сконструировать две новые совокупности $\mathbf{E}' = \{\boldsymbol{C}_i,\ i = 1..n;\ \boldsymbol{U}\}$ и $\mathbf{E}'' = \{\boldsymbol{C}_i,\ i = 1..n - 1;\ \boldsymbol{U}\}$. Первая из них избыточна и содержит $n + 1$ инструмент, а вторая – ровно n. Фактически, вторая получена из $\mathbf{E}$ заменой $\boldsymbol{C}_n \to \boldsymbol{U}$ (или из $\mathbf{E}'$ удалением $\boldsymbol{C}_n$); для нее уже $\det(\mathbf{Y}'') \ne 0$, она является базисом, и расширенный алгоритм можно применять к ней непосредственно.

Из совокупности $\mathbf{E}'$ благодаря наличию колла $\boldsymbol{C}_n$ легко (вручную) строится базис из баттерфляев $\mathbf{B} = \{\boldsymbol{B}_i,\ i \in I\}$, задаваемый соотношениями, можно применять канонический дискретный алгоритм в варианте #*BsB* (с векторами $\boldsymbol{c}^B$ и $\boldsymbol{p}^B$).

Из совокупности $\mathbf{E}''$ можно получить новый базис $\boldsymbol{\Phi}$ преобразованием $\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{E}''$. Этот базис не совпадает с каноническим базисом из баттерфляев $\mathbf{B} = \{\boldsymbol{B}_i,\ i \in I\}$. После перехода к базису $\boldsymbol{\Phi}$ можно применять тот же алгоритм, только теперь более логично называть эту версию алгоритма вариантом #Φ*s*Φ и использовать вместо $\boldsymbol{c}^B$ и $\boldsymbol{p}^B$ соответственно векторы $\boldsymbol{c}^\Phi$ и $\boldsymbol{p}^\Phi$, для вычисления которых можно применять непосредственно формулы расчета теоретических цен коллов.

Подобного несовпадения базисов не может быть на сценарном рынке с его базисными индикаторами. Однако на опционном рынке оно возникает и сказывается на окончательном решении. Сравнение решений двух задач демонстрирует преимущества первой. Колл $\boldsymbol{C}_n$, порождающий в матрице $\mathbf{Y}$ нулевую строку и потому не играющий самостоятельной роли, в первой задаче выполняет полезную вспомогательную функцию в образовании инструментов $\boldsymbol{B}_{n-1}$ и $\boldsymbol{B}_n$.

В то же время отсутствие колла $\boldsymbol{C}_n$ во второй совокупности ухудшает качество аппроксимации индикаторов сценариев в случае с последними двумя инструментами базиса $\boldsymbol{\Phi}$ (по сравнению с базисом $\mathbf{B}$), из-за чего платежная функция оптимального портфеля на крайних справа двух сценариях претерпевает искажения, приводящие к возможной утрате свойства неотрицательности (подробности см. в [2, 3]). (Разумеется, при большом желании эти недостатки, как всегда, можно объяснять издержками дискретизации.)

Литература

1. *Agasandian G. A.* Optimal Behavior of an Investor in Option Market / International Joint Conference on Neural Networks. The 2002 IEEE World Congress on Computational Intelligence (Honolulu, Hawaii, Mai 12-17, 2002). – P. 1859-1864.
2. *Агасандян Г.А.* Применение континуального критерия VaR на финансовых рынках. М.: ВЦ РАН, 2011. 299 с.
3. *Агасандян Г.А.* Континуальный критерий VaR на многомерных рынках опционов. М.: ВЦ РАН, 2011. 297 с.

4. *Агасандян Г.А*. Континуальный критерий VaR и оптимальный портфель инвестора // Управление большими системами. // Управление большими системами. М.: ИПУ РАН, 2018. Вып. 73. С. 6-26.
5. *Агасандян Г.А.* Континуальный критерий VaR на сценарных рынках // Информатика и ее применения. М.: ИПИ ФИЦ ИУ РАН, 2018. Т. 12. Вып. 1. С. 32–40.
6. *Крамер Г.* Математические методы статистики / Пер. с англ.– М.: Мир, 1975. 750 с. (Cramer H. Mathematical methods of statistics. – Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 1946. 575 p.).