СВОЙСТВА ПРОЦЕДУРЫ УПОРЯДОЧЕНИЯ В СЦЕНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ПО CC-VAR[44]

Агасандян Г.А.

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, г. Москва

agasand17@yandex.ru

Аннотация. Работа посвящена проблемам применения введенного автором континуального критерия VaR (CC-VaR) на дискретных сценарных рынках. Основные теоретические положения разработанного ранее континуального алгоритма построения оптимального по CC-VaR предназначены для теоретического рынка с континуальным базовым активом. Но основные приложения методологии CC-VaR связаны с дискретными рынками. В работе речь идет об адаптации этого алгоритма к сценарным рынкам путем проецирования на него континуального алгоритма. Изучаются основные свойства составляющей сердцевину алгоритма процедуры упорядочения сценариев по величине относительного дохода.

Ключевые слова: континуальный критерий VaR, сценарный рынок, алгоритм оптимизации, процедура Неймана-Пирсона, доход, инвестиционная сумма.

Введение

В [1, 2, 4] рассматривались проблемы применения CC-VaR на теоретическом идеальном однопериодном рынке с одним базовым активом. Однако основные приложения методологии CC-VaR связаны с дискретными рынками. При этом речь идет либо о сценарном рынке, либо о дискретном по страйкам рынке опционов. Но в любом случае базовый актив остается прежним – континуальным в отношении множества его будущих цен.

Рассматривается адаптация континуального алгоритма построения оптимального портфеля к сценарному рынку. При этом адаптация проводится в нескольких вариантах, и связаны они с назначением портфельных весов.

На дискретных рынках, в отличие от теоретических, не удается, как правило, получать *адекватные* решения [1-3], так как структура таких рынков противоречит континуальности ф.р.п. инвестора и его прогнозу рынка. Тем не менее решения можно рассматривать как приближенные.

Сценарный рынок

Основной теоретической моделью рынка, на котором инвестор находит адекватное отражение своих рисковых предпочтений, встроенных в CC-VaR, служит δ-рынок, рассмотренный в [1-4]. Конструкции этого рынка мы используем как отправной пункт для формирования дискретного сценарного рынка. Оптимальный портфель инвестора на δ-рынке служит также эталоном, с которым сравниваются прочие портфели, получаемые в результате применения различных способов дискретизации теоретического рынка.

Обозначаем через $\mathsf{X} = [a, b)$ множество цен базового актива. Заданы плотности $c(x)$ и $p(x)$, $x \in \mathsf{X}$, определяющие меры $\mathsf{C}\{\cdot\}$ и $\mathsf{P}\{\cdot\}$ соответственно. Сценарная дискретизация теоретического рынка определяется разбиением множества X. На нем заданы n сценариев $S_i \subset \mathsf{X}$, $i \in I$, $I = \{1, 2,\ldots, n\}$, образующие полную группу событий, т.е. $S_i \cap S_j = \varnothing$, $i \neq j$, и $\mathsf{X} = \cup_{i\in I} S_i$. Для простоты считаем разбиение равномерным: $S_i = [x_{i-1}, x_i)$, где $x_0 = a$, $x_i = a + ih$, $h = (b - a)/n$, $i \in I$.

На сценарном рынке базисными инструментами служат дискретные аналоги инструментов $\boldsymbol{D}(s)$ теоретического рынка – индикаторы сценариев $\boldsymbol{D}_i = \boldsymbol{H}\{S_i\}$, $i \in I$; при этом $\sum_{i\in I} \boldsymbol{D}_i = \boldsymbol{U}$. Их платежные функции $\pi(x; \boldsymbol{D}_i) = \chi_i(x)$, где $\chi_i(x)$ – характеристическая функция множества S_i, равная единице при $x \in S_i$ и нулю при $x \notin S_i$. Возможность торговать произвольными выпуклыми комбинациями базисных инструментов позволяет инвестору строить портфели, обеспечивающие произвольный вектор доходов с неотрицательными компонентами. Так, вектор доходов $\boldsymbol{g} = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ реализуется портфелем базисных инструментов $\boldsymbol{G} = \sum_{i\in I} g_i \boldsymbol{D}_i$. Его рыночная цена $|\boldsymbol{G}| = \sum_{i\in I} g_i c_i$, а средний доход – $\|\boldsymbol{G}\| = \sum_{i\in I} g_i p_i$. С индикаторами связаны неотрицательные *стоимостный* вектор $\boldsymbol{c} \equiv \{c_i, i \in I\}$ и *прогнозный* вектор $\boldsymbol{p} \equiv \{p_i\}$, где

$$(1)\qquad c_i = |\boldsymbol{D}_i| = \int_{x_{i-1}}^{x_i} c(x)\,dx = \int_{\mathsf{X}} \chi_i(x) c(x)\,dx, \quad p_i = \|\boldsymbol{D}_i\| = \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)\,dx = \int_{\mathsf{X}} \chi_i(x) p(x)\,dx, \quad i \in I.$$

Очевидно, $c_i = \mathsf{E}_{\mathsf{C}}\chi_i(x)$, $p_i = \mathsf{E}_{\mathsf{P}}\chi_i(x)$, $i \in I$, где переменная x интерпретируется как случайная по мерам $\mathsf{C}\{\cdot\}$ и $\mathsf{P}\{\cdot\}$ соответственно, а E_{C}, E_{P} – символы образования математического ожидания. Континуальный критерий VaR состоит в требовании выдерживать континуальное множество

[44] *Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 17-01-00816).*

вероятностных ограничений на доходы: $\mathsf{P}\{q \geq \phi(\varepsilon)\} \geq 1 - \varepsilon$ для всех $\varepsilon \in [0, 1]$, где q – доход, $\phi(\varepsilon)$ – функция рисковых предпочтений инвестора.

Дискретный алгоритм оптимизации

Дискретный алгоритм оптимизации портфеля формируется простым проецированием континуального алгоритма [1-4] на сценарный рынок. При заданных векторах $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{p}$ (1) сначала производится упорядочение сценариев по величине относительного дохода $\rho_i = p_i/c_i$, $i \in I$, а затем веса портфеля из инструментов $\boldsymbol{D}_i$, $i \in I$, назначаются в соответствии с вероятностями сценариев и ф.р.п. инвестора. Упорядочение сценариев производится процедурой Неймана-Пирсона, заимствованной из теории математической статистики и обладающей определенными свойствами оптимальности [5]. Она и составляет сердцевину алгоритма нарождения оптимального портфеля.

Дискретный алгоритм построения оптимального портфеля описывается следующей последовательностью обозначений и операций, при этом $i, j \in I$, а функции $\mathsf{f}_\mathsf{P}(\tau)$, $\mathsf{f}_\mathsf{P}(\tau)$, $\gamma(\varepsilon)$ и $w(x)$ являются атрибутами континуального алгоритма и аналогом вводимых далее дискретных характеристик:

$\boldsymbol{\rho} = \{\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_n\}$ – вектор относительных доходов $\rho_i = p_i/c_i$, дискретный аналог функции относительных доходов $\rho(x)$;

$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{O}(\boldsymbol{\rho})$ – вектор, задающий на множестве сценариев позиции компонент вектора $\boldsymbol{\rho}$ в порядке возрастания; $\mathbf{O}$ – соответствующее преобразование;

$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{O}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{O}^2(\boldsymbol{\rho})$ – вектор, обратный к $\boldsymbol{\xi}$: если $\xi_i = j$, то $\eta_j = i$; компонента η_j означает номер дохода ρ_j в вариационном ряду, построенном для вектора $\boldsymbol{\rho}$; при этом также и $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{O}(\boldsymbol{\eta})$;

$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\xi})$ – вектор относительных доходов с упорядоченными по возрастанию компонентами;

$\boldsymbol{\Xi} = \{y_{ij}\}$, где $y_{ij} = 1$, если $\xi_i = j$, и $y_{ij} = 0$, если $\xi_i \neq j$; матрица реализует преобразование $\mathbf{O}$; имеют место равенства $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\Xi}\,\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\Xi}^{-1}\boldsymbol{\eta}$;

$\mathbf{H} = \{\eta_{ij}\}$, где $\eta_{ij} = 1$, если $\eta_i = j$, и $\eta_{ij} = 0$, если $\eta_i \neq j$; реализует преобразование $\mathbf{O}^2$; имеют место равенства $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{H}\,\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{H}^{-1}\xi$; т.е. верны соотношения $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{H}^{-1}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{O}(\xi)$ и $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\Xi}^{-1}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{O}(\boldsymbol{\eta})$;

$\mathbf{T} = \{t_{ij}\}$, где $t_{ij} = 1$, если $i \leq j$, и $t_{ij} = 0$, если $i > j$; $\mathbf{T}$ – треугольная матрица, применяемая для последовательного суммирования компонент векторов, начиная с первой;

$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{\Xi}\,\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(\xi)$ – подстановка вектора $\boldsymbol{p}$ (суперпозиция $\boldsymbol{p}$ и ξ), компоненты которой упорядочены по возрастанию компонент вектора $\boldsymbol{\rho}$; обратно, верны равенства $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\Xi}^{-1}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{\eta})$;

$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{T}\,\boldsymbol{d}$ – вектор кумулятивных вероятностей для вектора $\boldsymbol{d}$;

$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\Xi}\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}(\xi)$ – подстановка $\boldsymbol{c}$, компоненты которой упорядочены по возрастанию компонент вектора $\boldsymbol{\rho}$; обратно, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{\Xi}^{-1}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\eta})$;

$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{T}\,\boldsymbol{f}$ – вектор кумулятивных цен для вектора $\boldsymbol{f}$;

$(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\varepsilon})$ – пара векторов, задающая отображение $\boldsymbol{\tau} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}$, аналог прогнозной функции $\mathsf{f}_\mathsf{P}(\tau)$;

$(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\gamma})$ – пара векторов, задающая отображение $\boldsymbol{\tau} \rightarrow \boldsymbol{\gamma}$, аналог стоимостной функции $\mathsf{f}_\mathsf{C}(\tau)$;

$(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\gamma})$ – пара векторов, задающая отображение $\boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow \boldsymbol{\gamma}$, аналог диссонанты $\gamma(\varepsilon)$;

$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta})$ – подстановка $\boldsymbol{\varepsilon}$ с исходным порядком компонент, аналог функции упорядочения $w(\cdot)$.

Принимается еще $\varepsilon_0 = 0$, $\gamma_0 = 0$ (без включения их в соответствующие векторы). □

Специфическая часть алгоритма связана с назначением весов базисных инструментов в портфеле – векторами $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{g}$. Первый из них показывает веса в порядке возрастания компонент вектора $\boldsymbol{\rho}$, а второй – в исходном порядке. Вектору $\boldsymbol{g}$ соответствует вектор вероятностей $\boldsymbol{p}$, а вектору $\boldsymbol{b}$ – вектор $\boldsymbol{d}$. Сначала назначается вектор $\boldsymbol{b}$, а на его основе определяется вектор $\boldsymbol{g}$ по формуле

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{\Xi}^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{H}\boldsymbol{b} \quad (\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\Xi}\,\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}(\xi) = \mathbf{H}^{-1}\boldsymbol{g}).$$

Зная вектор $\boldsymbol{b}$, можно определить и функцию распределения $\mathsf{F}(z)$ портфельного дохода:

$$\mathsf{F}(z) = \sum\nolimits_{i\in I} d_i \chi_{[b_i,\infty)}(z) = \sum\nolimits_{i: b_i \leq z} d_i = \{\varepsilon_i,\ b_i \leq z < b_{i+1},\ i \in I_0\},$$

где $b_0 = 0,\ \mathsf{F}(b_0^-) = 0;\quad b_{\nu+1} = \phi(1),\ \mathsf{F}(b_{\nu+1}) = 1,\quad I_0 = I \cup \{0\}$, а $\chi_M(\cdot)$– характеристическая функция множества $M \subset \mathfrak{R}$.

Наиболее естественным и простым (*каноническим*) способом назначения весов служит вектор $\boldsymbol{b} = \phi(\boldsymbol{\varepsilon})$ (или $\boldsymbol{g} = \phi(\boldsymbol{\omega})$). Именно этот способ обеспечивает полное выполнение всей системы неравенств CC-VaR. При иных способах, сохраняющих порядок ξ, происходят некоторые незначительные нарушения CC-VaR, но получаемые решения в некотором смысле даже точнее отражают суть проблемы. В этом отношении интересно интегральное осреднение в пределах сценариев:

$$b_i = \int_{\varepsilon_{i-1}}^{\varepsilon_i} \phi(z)\,dz \Big/ (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}), \quad i \in I.$$

Как и в [1-3], основными числовыми показателями построенных портфелей служат инвестиционная сумма A, средний доход R, средняя доходность y, стандартное отклонение доходности σ, образующие запись результатов $\boldsymbol{J} = \langle A, R, y, \sigma\rangle$. Они получаются по единым формулам, но в каждом варианте используется свой вектор $\boldsymbol{b}$ и потому $\boldsymbol{g} = \mathbf{H}\boldsymbol{b}$:

$$A = (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{f}), \quad R = (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}), \quad y = R/A - 1, \quad \sigma = ((\boldsymbol{g} - R)^2/A^2, \boldsymbol{p})^{1/2}.$$

Здесь $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ означает скалярное произведение векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$.

При решении конкретных задач для нахождения оптимальных весов базисных инструментов достаточно воспользоваться его краткой версией:

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{p}/\boldsymbol{c}; \ \ \xi = \mathbf{O}(\boldsymbol{\rho}); \ \ \boldsymbol{\eta} = \mathbf{O}(\xi); \ \ \boldsymbol{d} = \boldsymbol{p}(\xi); \ \ \mathbf{T} = [t_{ij}],\ t_{ij} = \{1,\ i \le j;\ t_{ij} = 0,\ i > j\},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{T}\,\boldsymbol{d}; \ \ \boldsymbol{b} = \phi(\varepsilon); \ \ \boldsymbol{g} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{\eta}).$$

Свойства процедуры упорядочения

Все векторы здесь считаются столбцами. Для произвольного вектора сценарных относительных доходов $\boldsymbol{\rho}$ обозначим через $\boldsymbol{\rho}'$ подстановку вектора $\boldsymbol{\iota} = \{1, 2,\ldots, n\}$ $(= I)$, являющуюся результатом монотонного преобразования $\boldsymbol{\rho}$ на $\boldsymbol{\iota}$. Иными словами, $\rho'(i)$, $i \in I$, означает порядковый номер элемента $\rho(i)$ в векторе $\boldsymbol{\rho}$. Если, например, $\boldsymbol{\rho} = \{1.5, 0.7, 1.0, 0.6, 1.2\}$, то $\boldsymbol{\rho}' = \{5, 2, 3, 1, 4\}$.

Построим вектор $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{O}(\boldsymbol{\rho})$ как результат проведения процедуры упорядочения $\mathbf{O}(\cdot)$ с вектором $\boldsymbol{\rho}$ (или, что то же, $\boldsymbol{\rho}'$), т.е. $\xi(i)$ $(= k)$ дает позицию i-го по величине элемента $\rho(k)$ вектора $\boldsymbol{\rho}$. Имеем $\boldsymbol{\xi} = \{4, 2, 3, 5, 1\}$. Аналогично можно построить вектор $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{O}(\xi)$, т.е. $\eta(i)$ $(= k)$ дает позицию i-го по величине элемента $\xi(k)$ вектора $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{O}(\boldsymbol{\eta})$. Имеет место равенство $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\rho}' = \{5, 2, 3, 1, 4\}$.

Матрицы Ξ и $\mathbf{H}$ обладают очевидными свойствами, непосредственно вытекающими из их определения ($\mathbf{I}_n$ – единичная матрица):

$$\Xi = \mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}^T; \ \ \mathbf{H} = \Xi^{-1} = \Xi^T; \qquad \boldsymbol{\Xi} = \mathbf{H}^2; \ \ \mathbf{H} = \boldsymbol{\Xi}^2; \ \ \boldsymbol{\Xi}^3 = \mathbf{H}^3 = \mathbf{I}_n.$$

Справедливы также соотношения

$$(2) \qquad \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\Xi}\,\boldsymbol{\iota}, \ \ \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\Xi}^2\boldsymbol{\iota}, \ \ \boldsymbol{\iota} = \boldsymbol{\Xi}^3\boldsymbol{\iota}; \qquad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{H}\,\boldsymbol{\iota}, \ \ \boldsymbol{\xi} = \mathbf{H}^2\boldsymbol{\iota}, \ \ \boldsymbol{\iota} = \mathbf{H}^3\boldsymbol{\iota};$$

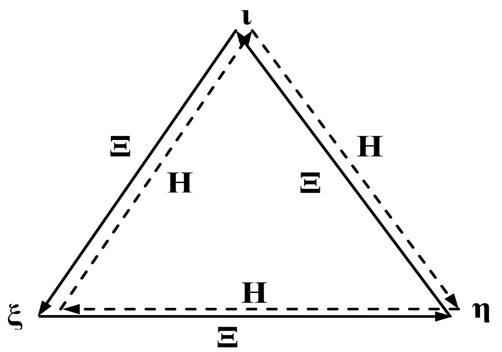
$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\Xi}\,\boldsymbol{\iota} = \mathbf{H}\boldsymbol{\eta} = \Xi^{-1}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{O}(\boldsymbol{\eta}); \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{H}\,\boldsymbol{\iota} = \boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{H}^{-1}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{O}(\boldsymbol{\xi}); \ \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\iota} = \mathbf{H}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi}).$$

Применение этих соотношений к векторам дискретного алгоритма $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{d}$, первые два из которых означают сценарные векторы прогноза и цен в исходном порядке, а последние два – те же векторы, но в порядке возрастания относительных доходов, дает дополнительные соотношения

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{c}, \qquad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{H}\boldsymbol{f};$$

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{p}, \qquad \boldsymbol{p} = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{H}\boldsymbol{d}.$$

Графическая иллюстрация свойства (2) приводится на схеме.



Литература

1. *Agasandian G. A.* Optimal Behavior of an Investor in Option Market / International Joint Conference on Neural Networks. The 2002 IEEE World Congress on Computational Intelligence (Honolulu, Hawaii, Mai 12-17, 2002). – P. 1859-1864.

2. *Агасандян Г.А.* Применение континуального критерия VaR на финансовых рынках. М.: ВЦ РАН, 2011. 299 с.

3. *Агасандян Г.А*. Континуальный критерий VaR на многомерных рынках опционов. М.: ВЦ РАН, 2011. 297 с.

4. *Агасандян Г.А.* Континуальный критерий VaR и оптимальный портфель инвестора // Управление большими системами. // Управление большими системами. М.: ИПУ РАН, 2018. Вып. 73. С. 6-26.
5. *Крамер Г.* Математические методы статистики / Пер. с англ.– М.: Мир, 1975. 750 с. (Cramer H. Mathematical methods of statistics. – Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 1946. 575 p.)

ОПЦИОННАЯ МОДИФИКАЦИЯ СЦЕНАРНОГО АЛГОРИТМА ОПТИМИЗАЦИИ ПО CC-VAR[45]

Агасандян Г.А.
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, г. Москва
agasand17@yandex.ru

Аннотация. *В рамках проблем применения континуального критерия VaR (CC-VaR) на финансовых рынках предлагается адаптация континуального алгоритма построения оптимального портфеля к опционному рынку. Дискретный алгоритм получается простым проецированием теоретического алгоритма, разработанного ранее для идеального однопериодного рынка с одним базовым активом, с заменой сценарных базисных инструментов простейшими нормированными баттерфляями. Приводится также расширенная версия алгоритма для базиса из элементарных инструментов – линейных комбинаций базисных баттерфляев. В качестве элементарных естественно использовать инструменты, непосредственно котирующиеся на рынке. Обсуждаются варианты выбора таких базисов и то, как при этом избежать проблемных базисов.*

Ключевые слова: континуальный критерий VaR, сценарный рынок, алгоритм оптимизации, процедура Неймана-Пирсона, доход, инвестиционная сумма.

Введение

Проблемы применения континуального критерия VaR (CC-VaR) на теоретическом идеальном однопериодном рынке с одним базовым активом рассматривались в [1-4]. Однако основные приложения методологии CC-VaR связаны с дискретными рынками – сценарным и дискретным по страйкам рынках опционов. Здесь излагается адаптация континуального алгоритма оптимизации к опционному рынку. Напомним конструкцию сценарного рынка и его основные инструменты.

Теоретической моделью рынка, на котором инвестор находит адекватное (точное) отражение своих рисковых предпочтений, встроенных в CC-VaR, служит δ-рынок. Обозначаем через $\mathsf{X} =[a, b)$ множество цен базового актива. Заданы стоимостная $c(x)$ и прогнозная $p(x)$ плотности, $x \in \mathsf{X}$, определяющие меры $\mathsf{C}\{\cdot\}$ и $\mathsf{P}\{\cdot\}$ соответственно. Сценарная дискретизация теоретического рынка определяется равномерным (для простоты) разбиением множества X на n сценариев $S_i \subset \mathsf{X}$, $i \in I = \{1, 2,\dots, n\}$, $S_i \cap S_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\mathsf{X} = \cup_{i\in I}S_i$, $S_i = [x_{i-1}, x_i)$, $x_0 = a$, $x_i = a + ih$, $h = (b - a)/n$, $i \in I$. Цена инструмента $\boldsymbol{G}$ обозначается $|\boldsymbol{G}|$, средний доход – $\|\boldsymbol{G}\|$.

На сценарном рынке базисными инструментами служат дискретные аналоги инструментов $\boldsymbol{D}(s)$ теоретического рынка – индикаторы сценариев $\boldsymbol{D}_i = \boldsymbol{H}\{S_i\}$, $i \in I$; при этом $\sum_{i\in I} \boldsymbol{D}_i = \boldsymbol{U}$. Их платежные функции $\pi(x; \boldsymbol{D}_i) = \chi_i(x)$, где $\chi_i(x)$ – характеристическая функция множества S_i, равная единице при $x \in S_i$ и нулю при $x \notin S_i$. *Рыночные цены* индикаторов и *прогнозные вероятности* сценариев образуют векторы $\boldsymbol{c}^S \equiv \{c_i^S, i \in I\}$ и $\boldsymbol{p}^S \equiv \{p_i^S, i \in I\}$, где

$$(1)\quad c_i^S = |\boldsymbol{D}_i| = \int_{x_{i-1}}^{x_i} c(x)dx = \int_{\mathsf{X}} \chi_i(x)c(x)dx, \quad p_i^S = \|\boldsymbol{D}_i\| = \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)dx = \int_{\mathsf{X}} \chi_i(x)p(x)dx, \quad i \in I.$$

Произвольный вектор доходов $\boldsymbol{g} = \{g_1, g_2,\dots, g_n\}$ реализуется портфелем базисных инструментов $\boldsymbol{G} = \sum_{i\in I} g_i\boldsymbol{D}_i$. Его рыночная цена $|\boldsymbol{G}| = \sum_{i\in I} g_ic_i$, а средний доход – $\|\boldsymbol{G}\| = \sum_{i\in I} g_ip_i$.

Общая часть дискретного алгоритма оптимизации формируется простым проецированием континуального алгоритма на сценарный рынок. А для его адаптации к рынку опционов напрашивается простая замена сценарного базиса базисом из нормированных простейших баттерфляев. Такая замена представляет самостоятельный интерес, но она может быть и вынужденной, если на дискретном рынке отсутствуют инструментальные индикаторы сценариев.

Базисы из баттерфляев и их цены

На дискретном по страйкам рынке опционов страйками возможных коллов и путов становятся центры сценариев $s_i = (x_{i-1} + x_i)/2 = a + h(i - 1/2)$, $i\in I$. Расстояние между соседними страйками равно h. Полагаем еще $s_0 = a$, $s_{n+1} = b$, но эти параметры страйками не являются.

[45] *Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 17-01-00816).*