КРИТЕРИЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ СПЕКТРА МАТРИЦЫ В ОБЛАСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ ЭЛЛИПСОМ, С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЯ КРЕЙНА

Агаев Р.П.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная д.65
agaraf3@gmail.com

Аннотация: Тезисы посвящены проблеме локализации собственных значений матрицы лапласовской матрицы орграфа связей многоагентной системы. Получено выражение для решения уравнения Крейна. Данное выражение обобщает результат, ранее полученный для уравнения Ляпунова с простой матрицей. Получено условие принадлежности спектра матрицы области, ограниченной эллипсом.

Ключевые слова: локализация спектра, уравнение Крейна, лапласовские матрицы.

Введение

Локализация собственных значений (спектра) матрицы, принадлежащей определенному классу матриц, играет важную роль в различных задачах управления. Например, в многоагентных системах с информационными связями такая задача возникает во всех протоколах согласования (консенсуса) характеристик агентов. Для конкретной матрицы вычисление спектра не составляет никакого труда. Однако, проблема локализации спектра матрицы из некоторого класса, без вычисления спектра, является сложной задачей. В настоящей работе с помощью уравнение М.Г. Крейна рассматривается критерий принадлежности спектра области, ограниченной эллипсом. Принадлежность спектра области, ограниченной эллипсом, также изучена в ряде работ (см., например, [2]). Однако в [2] используются след, норма и др. числа, связанные с матрицей.

1 Протоколы консенсуса для многоагентных систем с информационными связями

Рассмотрим некоторые базовые протоколы многоагентных систем из n агентов с информационными связями.

Пусть $\xi_i(t)$ – состояние -го агента и $a_{ij} \geq 0$ вес дуги (j,i) в орграфе связей, который соответствует степени влияния j-го агента на i-го. Рассмотрим следующий протокол [3,4] достижения консенсуса:

(1) $\dot{\xi}_i = -\sum_{j=1} a_{ij}\left(\xi_i - \xi_j\right).$

Уравнение (1) выпишем в матричной форме:

(2) $\dot{\xi} = -L\xi,$

где $\xi = (\xi_1, .., \xi_n)^{\mathrm{T}}$ и $L = (l_{ij})$ лапласовская матрица, которая определена следующим образом: $l_{ii} = \sum_{j\neq i} a_{ij}$ and $l_{ij} = -a_{ij}$. Целью протокола является достижение условия $\left|\xi_i - \xi_j\right| \to 0$ при $t \to \infty$. Консенсус, т.е. значение, к которому должны прийти агенты, равно $\bar{\xi} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)(\xi_1(0), .., \xi_n(0))^{\mathrm{T}}$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^{\mathrm{T}}$ левый собственный вектор для нулевого собственного значения матрицы L. Для системы с ориентированным графом связей скорость сходимости можно задать наименьшей действительной частью собственных значений матрицы L. Иногда в качестве скорости сходимости используют наименьшее характеристическое число симметричной матрицы $(L + L^{\mathrm{T}})/2$.

А теперь рассмотрим более общую модель достижения согласия – модель второго порядка [5]:

(3) $\begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\zeta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & I_n \\ -L & -\gamma L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix},$

где ξ и ζ – векторы состояний и скоростей агентов из множества $\{1,...,n\}$, $\gamma -$ коэффициент пересчета (scaling factor), а L – лапласовская матрица орграфа влияний между агентами. Цель протокола (1) – при $t \to \infty$ обеспечить $\left|\xi_i - \xi_j\right| \to 0$, $\left|\zeta_i - \zeta_j\right| \to 0$.

Необходимым и достаточным условием достижения консенсуса в системе с протоколом (2) является единственность нулевого собственного значения лапласовской матрицы орграфа связей. А скорость сходимости модели (2) для неориентированного графа определяется наименьшим ненулевым собственным значением. Однако для моделей второго порядка (3) это условие не является достаточным для достижения консенсуса. Дополнительное условие для согласования характеристик возникает при наличии комплексных собственных чисел среди собственных значений лапласовской матрицы L. Это и ряд других проблем, возникшие при синхронизации характеристик и движении по заданной конфигурации [6] требуют исследования области локализации спектра лапласовских матриц.

2 Выражение для решения уравнения Крейна

Пусть A – квадратная матрица порядка n с простыми собственными значениями.

Рассмотрим частный случай уравнения Крейна

$$(4)\qquad \sum_{j,k}^{N} a_{jk}(A^*)^j H A^k = C,$$

и пусть

$$P(\lambda,\mu) = \sum_{j,k}^{N} a_{jk}\lambda^j\mu^k,$$

где λ и μ – собственные значения матриц A^* и A, соответственно.

Если выполнено условие

$$P(\lambda_s,\mu_r) \neq 0,$$

то уравнение (4) имеет единственное решение (см. например, [1])

$$(5)\qquad H = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma_A}\int_{\gamma_{A^*}} \frac{1}{P(\lambda,\mu)}(\lambda I - A^*)^{-1} C (\mu I - A)^{-1} d\lambda\, d\mu.$$

Теорема 1. $H = S(Q \circ (S^{-1}C(S^*)^{-1}))S^*$, где $\circ$ – знак произведения по Шуру (Адамару), $Q = (q_{kj})$, где $q_{kj} = \frac{1}{P(\lambda_k,\mu_j)}$.

Доказательство теоремы 1. Пусть Z_{k1} – компоненты матрицы B, соответствующие k-му собственному значению. Согласно формуле (см. гл. 5 в [7])

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_B}(\mu I - B)^{-1} f(\lambda) d\lambda = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) Z_{k1},$$

решение (5) перепишем следующим образом

$$(6)\qquad H = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma_A}\int_{\gamma_{A^*}} \frac{1}{P(\lambda,\mu)}(\lambda I - A^*)^{-1} C (\mu I - A)^{-1} d\lambda\, d\mu$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_A}\sum_{k=1}^{s}\underset{Z_{k1}^*}{\frac{1}{P(\lambda_k,\mu)}} C(\mu I - A)^{-1} d\mu = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{P(\lambda_k,\mu_j)} Z_{k1}^*\, C\, Z_{j1}.$$

Пусть S – невырожденная матрица и $S^{-1}A^*S = \Lambda$, где Λ – диагональная матрица из собственных значений матрицы A^*. Теперь каждый член $Z_{k1}^* C Z_{j1}$ в (4) представим как

$$(7)\qquad q_{jk} S S^{-1} Z_{j1}^* S S^{-1} C\,(S^*)^{-1} S^* Z_{k1} (S^*)^{-1} S^*.$$

Легко можно доказать, что для каждого k имеет место: а) $S^* Z_{k1}(S^*)^{-1} = D_k$; б) $S^{-1}Z_{j1}^* S = D_j$ где D_i – диагональная матрица, у которой только i-й диагональный элемент равен 1, а остальные элементы – нулю.

Тогда (7) можно представить как

$$(8)\quad q_{jk} S S^{-1} Z_{j1}^* S S^{-1} C\,(S^*)^{-1} S^* Z_{k1}(S^*)^{-1} S^* = q_{jk} S\Lambda_j S^{-1} C\,(S^*)^{-1}\Lambda_k S^* = S(E_{jk} \circ (S^{-1}C(S^*)^{-1}))S^*,$$

где E_{jk} – матрица, у которой только элемент на j-й строке и k-м столбце равен q_{jk}, а остальные – нулю.

Применив формулу (8) к каждому члену, мы получим

$$(9)\qquad H = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} q_{kj} Z_{k1}^*\, C\, Z_{j1} = S(Q \circ (S^{-1}C(S^*)^{-1}))S^*.$$

В доказанной теореме обобщен результат, полученный в [8] для уравнения Ляпунова.

3 О локализации спектра нормированных лапласовских матриц

Пусть $A -$ квадратная матрица, $\sigma(A) -$ совокупность всех собственных значений A, $\mathcal{E} -$ область ограниченной эллипсом

$\mathcal{E} = \left\{\lambda = u + iv : \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} < 1\right\}.$

Рассмотрим уравнение Крейна следующего вида

(10) $H - \left(\frac{1}{2\cdot a^2} + \frac{1}{2\cdot b^2}\right) A^* H A - \left(\frac{1}{4\cdot a^2} - \frac{1}{4\cdot b^2}\right)\left(HA^2 + A^{*2}H\right) = C.$

Известно (стр. 58 в [1]), что спектр матрицы A принадлежит области $\mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда существует эрмитово положительно определенное решение H уравнения (7) при любой положительно определенной матрице C. Применим данный результат для нормированных лапласовских матриц L орграфа коммуникаций, веса дуг которых меньше $1/n$. В [9] доказано, что действительные части собственных значений принадлежат интервалу (0, 1), а мнимые части - $\left[-\frac{1}{\pi},\ +\frac{1}{\pi}\right]$. Для таких матриц формула (10) будет иметь вид:

(11) $H - \left(2 + \frac{\pi^2}{2}\right) L_0^* H L - \left(1 - \frac{\pi^2}{4}\right)\left(HL_0^2 + {L_0^*}^2 H\right) = C,$

где $L_0 = L - 0{,}5\, I$.

Уравнению (11) соответствует полином

$$P(\lambda,\mu) = P(\bar{\mu},\mu) = \sum_{j,k}^{2} a_{jk}\bar{\mu}^j \mu^k.$$

Тогда

$$P(\bar{\mu}_s,\mu_k) = 1 - \left(2 + \frac{\pi^2}{2}\right)\bar{\mu}_s\mu_k - \left(1 - \frac{\pi^2}{4}\right)\left(\bar{\mu}_s^2 + \mu_k^2\right) = 1 - (\bar{\mu}_s + \mu_k)^2 + \frac{\pi^2}{4}(\bar{\mu}_s - \mu_k)^2.$$

Легко можно установить, что для нормированных лапласовских матриц верно Re $P(\bar{\mu}_s,\mu_k) > 0$, то выполняется условие теоремы Крейна и уравнение (11) всегда будет иметь единственное решение

(12) $H = S(Q \circ (S^{-1}C(S^*)^{-1}))S^*$

при любой положительно определенной матрице C. Однако спектр принадлежит области, ограниченной заданным эллипсом, в том случае, когда решение H также является положительно определенной матрицей. Из явного выражения (12) и теоремы Шура о произведении Шура (см. теорему 5.2.1 в [8]) непосредственно следует, что H является положительно определенной тогда, когда матрица Q – положительно определена. Однако является ли положительная определенность Q и необходимым условием для положительной определенности матрицы H в данной работе не исследуется и заслуживает отдельного исследования.

Литература

1. *Демиденко Г.В.* Матричные уравнения. – Новосибирск. Наука, 2009. – 203с.

2. *Rojo O., Soto R. L., Avila T., Rojo H.* Localization of eigenvalues in elliptic regions. Computers & Mathematics with Applications. 1995. Vol. 29. №. 7. – P. 3-11.

3. *Olfati-Saber R.* Flocking for multi-agent dynamic systems: Algorithms and theory. Transactions on Automatic Control. 2006. Vol. 51. No. 3. P. 401-420.

4. *Jadbabaie A., Lin J., Morse A. S.* Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules. Departmental Papers (ESE). 2003. – P.986-1001.

5. *Ren W., Atkins* E. Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange. International Journal of Robust and Nonlinear Control. –2007. –V. 17. –No. 10-11. –P. 1002–1033.

6. *Veerman J.J.P., Lafferriere G., Caughman J.S., and Williams A.*, Flocks and Formations, J. Statist. Physics, 2005, vol. 121, no. 5–6, pp. 901–936.

7. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М. Наука, 1966. – 576с.

8. *Horn R. A., Johnson C. R.* Topics in matrix analysis, 1991. Cambridge University Press, Cambridge.

9. *Agaev R., Chebotarev P.* On the spectra of nonsymmetric Laplacian matrices. Linear Algebra and its Applications. 2005. Vol. 399. – C. 157-168.