

# ВСЕГДА ЛИ БЕЗОПАСНО КОАЛИЦИОННОЕ МАНИПУЛИРОВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОМ ГОЛОСОВАНИЯ?

Веселова Ю.А.

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,*

*Россия, г. Москва, ул. Мясницкая д.20;*

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,*

*Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная д.65*

*yul-r@mail.ru*

*Аннотация: При манипулировании со стороны коалиций существует опасность получить результат худший, чем был изначально, если не все члены коалиции решают манипулировать. В этом случае манипулирование небезопасно. В докладе рассматривается вопрос о том, для каких правил и при каких условиях манипулирование небезопасно.*

Ключевые слова: принятие коллективных решений, манипулирование, безопасность манипулирования.

## **Введение**

Проблема принятия коллективных решений широко известна: она возникает во всех ситуациях, когда требуется учесть мнение множества агентов, но решение необходимо принять одно. Результат, т.е. коллективное решение, можно получить, собрав предпочтения всех избирателей и агрегировав их при помощи некоторого правила коллективного выбора. Существует множество процедур, отличных по своим свойствам, однако для любого однозначного недиктаторского правила доказано (теорема Гиббарда-Саттертуэйта [1], [2]), что если имеется хотя бы три возможных исхода, то правило подвержено манипулированию. Это означает, что избиратели могут добиться более предпочтительного для них результата голосования, намеренно исказив свои предпочтения.

В работе рассматривается проблема манипулирования результатом голосования со стороны коалиций избирателей. Коалицией называется группа избирателей, имеющих одинаковые предпочтения. Если в результате изменения предпочтений на неискренние всеми членами коалиции удастся достичь более предпочтительного для них результата голосования, то каждый из членов коалиции имеет стимул манипулировать. В то же время, при недостаточной согласованности действий членов коалиции существует опасность получить результат худший, чем был изначально, если не все члены коалиции решают манипулировать. В этом случае коалиционное манипулирование небезопасно.

Проблема несогласованности стратегических действий групп избирателей исследовалась также в [3], однако предложенное авторами определение безопасного манипулирования несколько отличается от рассматриваемого в данной работе. Предполагается, что избиратель имеет стимул манипулировать, если существует некоторое подмножество избирателей из множества его единомышленников (коалиции), которые при одинаковом изменении предпочтений могут добиться более выгодного для себя результата голосования. При такой формулировке существует проблема координирования действий членами коалиции: кто из них должен манипулировать, и каким именно образом, а кто – нет. Поэтому авторами [3] предложено считать манипулирование небезопасным, если существует возможность получить результат хуже первоначального, если слишком мало или слишком много членов коалиции решат манипулировать.

Предложенное в данной работе определение манипулирования в большей степени подходит для ситуаций, когда коммуникационные возможности членов коалиции ограничены. Каждый избиратель может предполагать, что обладающие идентичными предпочтениями другие избиратели будут действовать идентично, поэтому принимает решение о манипулировании, учитывая, что его единомышленники также будут манипулировать. С другой стороны, избирателю необходимо понять, не приведет ли попытка манипулирования к провалу в случае, если некоторые члены коалиции откажутся манипулировать несмотря на то, что это более выгодно. Введение этих предпосылок является следующим шагом в моделировании независимо действующих избирателей после наиболее простой модели индивидуального манипулирования, в которой избиратели не учитывают стимулы других избирателей к манипулированию.

В докладе представлены результаты теоретического исследования существования небезопасного коалиционного манипулирования в профиле, если применяется правило подсчета очков. Это исследование вносит вклад в литературу по данной теме, так как ранее рассматривался только вопрос о существовании безопасного манипулирования. Однако безопасно манипулируемый профиль

существует всегда, если правило удовлетворяет условиям теоремы Гиббарда-Саттертуэйта [3], а небезопасное манипулирование имеет место далеко не всегда.

## 1 Примеры, термины и обозначения

### 1.1 Пример небезопасного манипулирования

Рассмотрим пример небезопасного коалиционного манипулирования. Профиль предпочтений для 7 избирателей представлен следующей таблицей. Первый столбец таблицы означает, что имеется три избирателя, для которых альтернатива  $a$  является наилучшей,  $b$  – второй наилучшей и т.д.

	3	2	1	1
a	d	d	e	e
b	c	c	d	d
c	b	e	a	a
e	e	a	c	c
d	a	b	b	b

Пусть для принятия коллективного решения используется правило Борда. Согласно этому правилу, за каждое  $k$ -ое место в индивидуальных предпочтениях альтернатива получает  $m - k$  очков. Сумма очков по всем избирателям для альтернативы  $x$  обозначается за  $S(x)$ . Таким образом, суммарное количество очков для каждой альтернативы:  $S(a)=15$ ,  $S(b)=13$ ,  $S(c)=16$ ,  $S(d)=15$ ,  $S(e)=11$ . Победитель голосования – альтернатива  $c$ , набравшая наибольшее количество очков. Рассмотрим коалицию  $K$ , состоящую из трех избирателей первого столбца таблицы, имеющих предпочтения  $aPbPcPePd$ . Члены коалиции  $K$  имеют стимул манипулировать, сообщая неискренние предпочтения  $bPaPePcPd$ . В этом случае распределение очков следующее:  $S(a)=12$ ,  $S(b)=16$ ,  $S(c)=13$ ,  $S(d)=15$ ,  $S(e)=14$ . Результат голосования – альтернатива  $b$ , являющаяся более предпочтительной для членов коалиции. Теперь предположим, что манипулировать решает только один избиратель из коалиции  $K$ . Тогда  $S(a)=14$ ,  $S(b)=14$ ,  $S(c)=15$ ,  $S(d)=15$ ,  $S(e)=12$ . Наибольшее количество очков набирают альтернативы  $c$  и  $d$ . Кроме того, предположим, что по правилу устранения множественности выбора выбирается альтернатива  $d$ . Таким образом, результат голосования оказывается для членов коалиции менее предпочтительным, чем был изначально. Манипулирование со стороны членов коалиции с использованием стратегии  $bPaPePcPd$  называется небезопасным.

### 1.2 Правила подсчета очков

Обозначим за  $m$  число альтернатив, за  $n$  – количество избирателей. В докладе будут представлены результаты исследования безопасности коалиционного манипулирования для семейства правил подсчета очков, которому принадлежит правило относительного большинства и уже упомянутое правило Борда. Любое правило из этого семейства определяется вектором очков  $s = (s_1 \geq \dots \geq s_m)$ ,  $s_1 \geq \dots \geq s_m$  где  $s_j$  обозначает количество очков, присваиваемых альтернативе за  $j$ -ю позицию в индивидуальных предпочтениях избирателя. Общее количество очков для альтернативы  $a$  обозначается за  $S(a)$  и вычисляется как сумма очков по всем избирателям. Примеры векторов очков:

- правило относительного большинства:  $s_{PI} = (1, 0, \dots, 0)$ ;
- правило вето:  $s_V = (1, \dots, 1, 0)$ ;
- правило Борда:  $s_B = (m - 1, m - 2, \dots, 1, 0)$ .

Ясно, что для любого правила подсчета очков хотя бы одно нестрогое неравенство должно выполняться как строгое неравенство. Пусть

- (1)  $k_1 = \min(j \in \{1, \dots, m\}, \text{т.ч. } s_j - s_{j+1} > 0)$ ,  $\Delta_1 = s_{k_1} - s_{k_1+1}$ ,
- (2)  $k_2 = \min(j \in \{k_1, \dots, m\}, \text{т.ч. } s_j - s_{j+1} > 0)$ ,  $\Delta_2 = s_{k_2} - s_{k_2+1}$ ,
- (3)  $k_3 = \min(j \in \{k_2, \dots, m\}, \text{т.ч. } s_{j+1} - s_j > 0)$ ,  $\Delta_3 = s_{k_2} - s_{k_2+1}$ , и т.д.

Таким образом,  $k_1$  – номер элемента вектора очков, для которого следующий за ним элемент меньше данного (имеет место скачок значений элементов вектора). Пусть  $q$  – количество таких элементов (скачков).

## 2 Результаты

Теорема 1. Существование небезопасно манипулируемого профиля для правил подсчета очков при отражено в Таблице 1.

Таблица 1.

	Нет	Нет	Нет	-
	Нет	Да	Нет	Да, если или , Нет, иначе.
	Нет	Да	Нет, если Да, иначе.	Да
6	Нет	Да	Да	Да

Как следствие из Теоремы 1, любое коалиционное манипулирование для правила относительного большинства и правила вето является безопасным для любых  $n \geq 3$  и  $m \geq 3$ , так как в векторе очков этих правил только один скачок значений. Для правила Борда небезопасно манипулируемый профиль существует при  $m \geq 5$ , так как после все значения элементов вектора очков правила Борда различны, и  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 \dots$ . Точное значение минимального числа избирателей, необходимого для существования небезопасного манипулирования определяется следующей теоремой.

Теорема 2 Небезопасно манипулируемый профиль для правила Борда существует, если и только если  $m \geq 5$  и  $n \geq 5$ .

Таким образом, определены условия, при которых существует небезопасное коалиционное манипулирование для правил подсчета очков. Возможно, доля таких профилей столь невелика, что небезопасность манипулирования не является фактическим препятствием для коалиционного манипулирования. Однако данный вопрос пока остается открытым и является возможной темой дальнейших исследований в этом направлении.

## Литература

1. Gibbard A. Manipulation of voting schemes: a general result // *Econometrica: journal of the Econometric Society*. Vol. 41. 1973, № 4. – P.587-601.
2. Satterthwaite M.A. Strategy-proofness and Arrow's conditions: Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions // *Journal of economic theory*. Vol. 10. 1975, №. 2. – P.187-217.
3. Slinko A., White S. Is it ever safe to vote strategically? // *Social Choice and Welfare*. Vol. 43. 2014, №. 2. – P.403-427.