ПРОЕКТОРНЫЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ[96]

Курина Г.А.

Воронежский государственный университет,
Россия, г.Воронеж, Университетская пл., д.1,
Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук (ФИЦ ИУ РАН), Россия, г. Москва, ул.Вавилова, д.44/2
kurina@math.vsu.ru,

Хоай Н.Т.

Ханойский научный университет, Вьетнам, г. Ханой, 334 Нгуен Трай, Тхань Суан,
nguyenthihoai@hus.edu.vn

Аннотация: Предлагаемый проекторный подход позволяет понятнее изложить метод пограничных функций построения асимптотики решения для одного класса сингулярно возмущенных задач в критическом случае из статьи В.Ф. Бутузова и Н.Н. Нефедова (Дифференц. уравнения, 1976) и представить явные формулы для отыскания приближения произвольного порядка.

---

[96] *Работа первого автора была поддержана Российским научным фондом (проект № 17-11-01220)*

Ключевые слова: сингулярные возмущения, критический случай, асимптотические разложения, проекторный подход.

Введение

Рассматривается задача из [1] вида

(1) $$\varepsilon^2 dx/dt = A(t)x + \varepsilon f(x,t,\varepsilon), \qquad t \in [0,T],$$

(2) $$x(0,\varepsilon) = x^0,$$

где $x = x(t,\varepsilon) \in X = R^m$, матрица $A(t)$ и вектор-функция $f(x,t,\varepsilon)$ соответствующей размерности достаточно гладкие по своим аргументам и матрица $A(t)$ вырождена. Обозначим через $\lambda_1(t), \lambda_2(t), ..., \lambda_m(t)$ собственные значения матрицы $A(t)$. Предположим, что выполняются следующие условия

I. $\lambda_j(t) = 0$ для $j = 1, 2, ..., k$ ($k < m$),

II. Матрица $A(t)$ имеет k собственных векторов $v_j(t)$, соответствующих нулевым собственным значениям $\lambda_j(t) = 0$, $j = 1, 2, ..., k$, которые линейно независимы.

В настоящей работе используемые собственные векторы имеют ту же гладкость, что и матрица $A(t)$, обозначение оператора со штрихом означает сопряженный оператор, а I – тождественный оператор. Для коэффициента $w_j(t)$ в разложении функции $w(t,\varepsilon)$ в ряд по целым неотрицательным степеням ε: $w(t,\varepsilon) = \sum_{j\ge 0} w_j(t)\varepsilon^j$ будем использовать обозначение $[w(t,\varepsilon)]_j$.

1 Декомпозиция задачи

Следуя [1], асимптотическое решение задачи (1), (2) ищется в виде

(3) $$x(t,\varepsilon) = \bar{x}(t,\varepsilon) + \Pi_1 x(\tau_1,\varepsilon) + \Pi_2 x(\tau_2,\varepsilon),$$

где $\bar{x}(t,\varepsilon) = \sum_{j\ge 0}\varepsilon^j \bar{x}_j(t)$, $\Pi_i x(\tau_i,\varepsilon) = \sum_{j\ge 0}\varepsilon^j \Pi_{ij} x(\tau_i)$, $\tau_i = t/\varepsilon^i$, $i = 1,2$, $\Pi_{ij} x(\tau_i) \to 0$ при $\tau_i \to +\infty$. Значение функции $f(\bar{x}(t,\varepsilon) + \Pi_1 x(\tau_1,\varepsilon) + \Pi_2 x(\tau_2,\varepsilon), t, \varepsilon)$ представляется в виде разложения по степеням ε: $\bar{f} + \Pi_1 f + \Pi_2 f$, где $\bar{f} = f(\bar{x}(t,\varepsilon), t, \varepsilon) = \sum_{j\ge 0}\varepsilon^j \bar{f}_j(t)$,

$$\Pi_1 f = f(\bar{x}(\varepsilon\tau_1, \varepsilon) + \Pi_1 x(\tau_1,\varepsilon), \varepsilon\tau_1, \varepsilon) - f(\bar{x}(\varepsilon\tau_1, \varepsilon), \varepsilon\tau_1, \varepsilon) = \sum_{j\ge 0}\varepsilon^j \Pi_{1j} f(\tau_1),$$

$$\Pi_2 f = f(\bar{x}(\varepsilon^2\tau_2, \varepsilon) + \Pi_1 x(\varepsilon\tau_2,\varepsilon) + \Pi_2 x(\tau_2,\varepsilon), \varepsilon^2\tau_2, \varepsilon) - f(\bar{x}(\varepsilon^2\tau_2, \varepsilon) + \Pi_1 x(\varepsilon\tau_2,\varepsilon), \varepsilon^2\tau_2, \varepsilon)$$
$$= \sum_{j\ge 0}\varepsilon^j \Pi_{2j} f(\tau_2).$$

Стандартным образом после подстановки разложения (3) в (1) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε, отдельно зависящих от t и τ_i, $i = 1,2$, получаем уравнения

(4) $$d\bar{x}_{j-2}(t)/dt = A(t)\bar{x}_j(t) + \bar{f}_{j-1}(t),$$

(5) $$d\Pi_{1(j-1)} x(\tau_1)/d\tau_1 = A(0)\Pi_{1j} x(\tau_1) + [(A(\varepsilon\tau_1) - A(0))\Pi_1 x(\tau_1,\varepsilon)]_j + \Pi_{1(j-1)} f(\tau_1),$$

(6) $$d\Pi_{2j} x(\tau_2)/d\tau_2 = A(0)\Pi_{2j} x(\tau_2) + [(A(\varepsilon^2\tau_2) - A(0))\Pi_2 x(\tau_2,\varepsilon)]_j + \Pi_{2(j-1)} f(\tau_2), \; j \ge 0.$$

(Члены ряда (3) с отрицательными индексами считаются нулевыми.)

После подстановки разложения (3) в (2) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε получаем равенства

(7) $$\bar{x}_0(0) + \Pi_{10} x(0) + \Pi_{20} x(0) = x^0, \qquad \bar{x}_j(0) + \Pi_{1j} x(0) + \Pi_{2j} x(0) = 0, \; j \ge 1.$$

Далее будем использовать разложения пространства X в ортогональные суммы $X = \ker A(t) \oplus \mathrm{im} A(t)' = \ker A(t)' \oplus \mathrm{im} A(t)$.

Введем обозначения $V(t) = (v_1(t), ..., v_k(t))$ и $S(t) = (s_1(t), ..., s_k(t))$, где $s_1(t), ..., s_k(t)$ -собственные векторы матрицы $A(t)'$, соответствующие собственным значениям $\lambda_j(t) = 0, j = 1, ..., k$, причем

$V(t)'S(t)=I$. Операторы $P(t)=V(t)(V(t)'V(t))^{-1}V(t)'$ и $Q(t)=S(t)(S(t)'S(t))^{-1}S(t)'$ являются ортогональными проекторами пространства X соответственно на подпространства $\ker A(t)$ и $\ker A(t)'$.

Обратный к оператору $(I-Q(t))A(t)(I-P(t)):\mathrm{im}A(t)'\to \mathrm{im}A(t)$ будем обозначать $A(t)^+$.

Посредством дифференцирования из равенства $A(t)P(t)=0$ получаем

(8) $$Q(t)(dA(t)/dt)P(t)=0.$$

Предположим, что в дополнение к условиям I, II выполняются следующие условия:

III. Для каждого $t\in[0,T]$ оператор $(I-P(t))A(t)(I-P(t)):\mathrm{im}A(t)'\to \mathrm{im}A(t)'$ устойчивый.

IV. Уравнение $Q(t)f(P(t)x(t),t,0)=0$ имеет единственное изолированное достаточно гладкое решение $P(t)x(t)$.

V. Для каждого $t\in[0,T]$ оператор $(Q(t)P(t))^{-1}Q(t)f_x(\bar{x}_0(t),t,0)P(t):\ker A(t)\to\ker A(t)$ устойчивый.

2 Приближение нулевого порядка

Из (4), (5) при $j=0$ получаем уравнения для $\bar{x}_0(t),\Pi_{10}x(\tau_1)$: $A(t)\bar{x}_0(t)=0$, $A(0)\Pi_{10}x(\tau_1)=0$. Отсюда следуют равенства: $(I-P(t))\bar{x}_0(t)=0$, $(I-P(0))\Pi_{10}x(\tau_1)=0$. Из (6) при $j=0$ имеем уравнение для $\Pi_{20}x(\tau_2)$: $d\Pi_{20}x(\tau_2)/d\tau_2=A(0)\Pi_{20}x(\tau_2)$. Это уравнение эквивалентно системе

(9) $$d((I-P(0))\Pi_{20}x(\tau_2))/d\tau_2=(I-P(0))A(0)(I-P(0))\Pi_{20}x(\tau_2),$$

(10) $$d(P(0)\Pi_{20}x(\tau_2))/d\tau_2=P(0)A(0)(I-P(0))\Pi_{20}x(\tau_2).$$

Из первого равенства в (7) при $j=0$ получаем $(I-P(0))\Pi_{20}x(0)=(I-P(0))x^0$. В силу условия III уравнение (9) с этим начальным условием имеет единственное решение – пограничную функцию экспоненциального типа. Решением уравнения (10) является единственная пограничная функция экспоненциального типа $P(0)\Pi_{20}x(\tau_2)=-\int_{\tau_2}^{+\infty}P(0)A(0)(I-P(0))\Pi_{20}x(s)ds$.

Из (4) при $j=1$ имеем равенство $0=A(t)\bar{x}_1(t)+\bar{f}_0(t)$. Ввиду условия IV уравнение $Q(t)f(P(t)\bar{x}_0(t),t,0)=0$ имеет единственное изолированное решение $P(t)\bar{x}_0(t)$.

Далее из (7) при $j=0$ находим

(11) $$P(0)\Pi_{10}x(0)=P(0)(x^0-\bar{x}_0(0)-\Pi_{20}x(0)).$$

Из (5) при $j=1$ в силу (8) получаем уравнение

(12) $$d(P(0)\Pi_{10}x(\tau_1))/d\tau_1=(Q(0)P(0))^{-1}Q(0)f(P(0)\bar{x}_0(0)+P(0)\Pi_{10}x(\tau_1),0,0).$$

Предположим, что выполняется условие

VI. Найденное начальное условие (11) для $P(0)\Pi_{10}x(0)$ принадлежит области влияния точки покоя $P(0)\Pi_{10}x(\tau_1)=0$.

Ввиду этого условия единственным решением начальной задачи (12), (11) является пограничная функция экспоненциального типа. Значит, функция $\Pi_{10}x(\tau_1)$ найдена.

Следовательно, асимптотика нулевого порядка решения задачи (1), (2) построена.

3 Приближения высших порядков

Предположим, что члены разложения (3): $\bar{x}_j(t),\Pi_{ij}x(\tau_i),i=1,2,\ j=0,1,\dots,n-1,n\ge1$, уже найдены.

Из уравнения (4) при $j=n$ следует, что: $(I-P(t))\bar{x}_n(t)=A(t)^+(I-Q(t))(d\bar{x}_{n-2}(t)/dt-\bar{f}_{n-1}(t))$.

Из уравнения (5) при $j=n$ получаем

$$(I-P(0))\Pi_{1n}x(\tau_1)=A(0)^+(I-Q(0))(d\Pi_{1(n-1)}x(\tau_1)/d\tau_1-[(A(\varepsilon\tau_1)-A(0))\Pi_1x(\tau_1,\varepsilon)]_n-\Pi_{1(n-1)}f(\tau_1))$$

Затем из (7) при $j=n$ находим начальное значение

(13) $$(I-P(0))\Pi_{2n}x(0)=-(I-P(0))(\bar{x}_n(0)+\Pi_{1n}x(0)).$$

Уравнение (6) при $j=n$ эквивалентно системе

(14) $$d((I-P(0))\Pi_{2n}x(\tau_2))/d\tau_2=(I-P(0))A(0)(I-P(0))\Pi_{2n}x(\tau_2) + (I-P(0))[(A(\varepsilon^2\tau_2)-A(0))\Pi_2 x(\tau_2,\varepsilon)]_n+(I-P(0))\Pi_{2(n-1)}f(\tau_2),$$

(15) $$d(P(0)\Pi_{2n}x(\tau_2))/d\tau_2=P(0)(A(0)\Pi_{2n}x(\tau_2)+[(A(\varepsilon^2\tau_2)-A(0))\Pi_2 x(\tau_2,\varepsilon)]_n+\Pi_{2(n-1)}f(\tau_2)).$$

В силу условия III единственным решением задачи (14), (13) является пограничная функция экспоненциального типа. Теперь из (15) получаем $P(0)\Pi_{2n}x(\tau_2)=-\int_{\tau_2}^{+\infty}P(0)(A(0)(I-P(0))\Pi_{2n}x(s)+[(A(\varepsilon^2 s)-A(0))\Pi_2 x(s,\varepsilon)]_n+\Pi_{2(n-1)}f(s))ds$.

Из (4) при $j=n+1$ получаем равенство $Q(t)(\bar{f}_n(t)-d\bar{x}_{n-1}(t)/dt)=0$, где $\bar{f}_n(t)=f_x(\bar{x}_0(t),t,0)P(t)\bar{x}_n(t)+\varsigma(t)$, $\varsigma(t)$ - известная функция. Согласно условию V из последнего равенства однозначно определяется $P(t)\bar{x}_n(t)$.

Из (7) при $j = n$ определяем начальное значение

(16) $$P(0)\Pi_{1n}x(0)=-P(0)(\bar{x}_n(0)+\Pi_{2n}x(0)).$$

Из (5) при $j = n + 1$ с учетом (8) получаем уравнение

(17) $$d(P(0)\Pi_{1n}x(\tau_1))/d\tau_1=(Q(0)P(0))^{-1}Q(0)\big(f_x(\bar{x}_0(0)+\Pi_{10}x(\tau_1),0,0)P(0)\Pi_{1n}x(\tau_1)+\varsigma(\tau_1)\big),$$

где $\varsigma(\tau_1)$ - известная пограничная функция экспоненциального типа от аргумента τ_1. В силу предположения V решением задачи (17), (16) является пограничная функция экспоненциального типа. Значит, функция $\Pi_{1n}x(\tau_1)$ найдена.

Теорема 1. При условиях I – VI асимптотическое решение задачи (1), (2) в виде (3) может быть построено при помощи ортогональных проекторов на $\ker A(t)$ и $\ker A(t)'$. Порядок нахождения членов асимптотики следующий: $(I-P(t))\bar{x}_j(t)$, $(I-P(0))\Pi_{1j}x(\tau_1)$, $(I-P(0))\Pi_{2j}x(\tau_2)$, $P(0)\Pi_{2j}x(\tau_2)$ $P(t)\bar{x}_j(t)$ и $P(0)\Pi_{1j}x(\tau_1)$, $j\ge 0$.

Литература

1.*Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.* Об одной задаче теории сингулярных возмущений // Дифференциальные уравнения. Т. 12. 1976, № 10. – С.1736-1747.