МЕХАНИЗМЫ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА ПРОЕКТОВ, БАЗИРУЮЩИЕСЯ НА ОТНОШЕНИЯХ ДОМИНИРОВАНИЯ С *K*-ЫМ ПОРЯДКОМ СТРОГОГО ПРЕДПОЧТЕНИЯ

Корнеенко В.П.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная д.65
vkorn@ipu.ru

Предложен новый принцип построения результирующего отношения предпочтения – результирующее отношение доминирования с k-м порядком строгого предпочтения объектов, который обобщает частные результирующие отношения доминирования по Парето и Слейтору. Разработаны и обоснованы механизмы многокритериального выбора, базирующиеся на отношениях доминирования с k-ым порядком строгого предпочтения.

Ключевые слова: многокритериальный выбор, *k*-й порядк строгого предпочтения, механизм выбора.

Введение

Выделение единственного объекта из множества эффективных (недоминируемых) объектов на основе информации, содержащейся в постановке многокритериальной задачи выбора невозможно. В связи с этим возникает проблема выбора ограниченного числа объектов из множества недоминируемых объектов, оценки которых представлены в различных шкалах измерения.

В развитие теории выбора вариантов [1, 2, 5] рассмотрим модели многокритериального выбора, базирующиеся на отношениях доминирования с k-ым порядком строгого предпочтения.

1 Результирующие отношения доминирования с k-м порядком строгого предпочтения

Большинство многокритериальных задач относятся к классу задач со структурой выбора с мультипредпочтением. К таким структурам, в частности, могут быть приведены математические конструкции различных игровых задач и задач векторной оптимизации.

Задача выбора наилучшего объекта относится к классу многокритериальных задач векторной оптимизации [3, 4]:

(1.1) $f(a_l) = (f_1(a_l), f_2(a_l), \dots, f_j(a_l), \dots, f_m(a_l)) \rightarrow \text{extr}, \forall\, a_l \in A,$

где $f = (f_1, \dots, f_m)$ – вектор-функция, принимающая значения в соответствующем пространстве $\mathbb{R}^m$.

$A = \{a_1, \dots, a_n\} -$ конечное множество объектов, n - количество объектов (проектов).

На данный момент применительно к решению многокритериальных задач определены два результирующих отношения предпочтения на множестве векторных оценок объектов, а именно: отношения доминирования по Парето и Слейтору [4].

Пусть в задаче векторной оптимизации (1.1) частные критерии f_j, $j \in J = \{1, 2, \dots, m\}$, максимизируются (минимизируются) и $\vec{x}_l = (x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, \dots, x_m^{(l)})$ – векторная оценка объекта $a_l \in A$. Покажем, что результирующие отношения доминирования по Парето и доминирования по Слейтору являются частными случаями результирующих отношений $\succ^k$ доминирования с k-м порядком строго предпочтения объектов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Для объектов с прямым порядком предпочтения объект a_l доминирует с k-ым порядком строгого предпочтения объект a_q (обозначение $a_l \succ^k a_q$), если для оценок

$x_j^{(l)} = f_j(a_l)$

объектов по всем критериям f_j, $\forall\, j \in J$, выполняются нестрогие неравенства $x_j^{(l)} \geq x_j^{(q)}$, причём, по крайней мере для k критериев $f_{j_1}, \dots, f_{j_k}$ с номерами j_i, $i = \overline{1,k}$, выполняются строгие неравенства $x_{j_i}^{(l)} > x_{j_i}^{(q)}$, что записывается в виде:

(1.2) $a_l \succ^k a_q \Leftrightarrow \forall\, j \in J\colon x_j^{(l)} \geq x_j^{(q)} \wedge \exists \left\{ j_i | i = 1, 2, \dots, k\} \subseteq J\colon x_{j_i}^{(l)} > x_{j_i}^{(q)} \right\}.$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Объект a^* задачи векторной оптимизации (1.1) называется эффективным (k-эффективным), если не существует объекта a, доминирующего с k-ым порядком строгого предпочтения объект a^*. При этом множество недоминируемых объектов

(1.3) $A_k^{nd} = \{a^* \in A \mid \nexists\, a : a \succ^k a^*\}, k = \overline{1,m},$

носит название множества k-эффективных (по Рамееву-Корнеенко) объектов (определения 1.1 и 1.2 введены автором в соавторстве с О.А. Рамеевым).

Легко видеть, что множество A_1^{nd} одно-эффективных объектов совпадает с множеством Парето A_p^{nd} (1.1.6), т. е. $A_p^{nd} = A_1^{nd}$, а множество A_m^{nd} m-эффективных объектов совпадает с множеством Слейтора A_s^{nd} (1.1.8), т. е. $A_s^{nd} = A_m^{nd}$.

Таким образом, доминирование по Парето $\succ^p$ это доминирование *с* k-ым порядком строгого предпочтения $\succ^1$ при $k = 1$, а доминирование по Слейтору $\succ^s$ это доминирование $\succ^m$ при $k = m$, т. е. являются частным случаем доминирования с k-ым порядком строгого предпочтения объектов.

Выделение единственного объекта из множества эффективных (недоминируемых) объектов на основе информации, содержащейся в постановке задачи (1.1) невозможно. В связи с этим возникает проблема выбора ограниченного числа объектов из множества недоминируемых объектов, оценки которых представлены в различных шкалах измерения. Данная проблема решается в рамках методологии многокритериального оценивания объектов [4].

2 Механизмы многокритериального выбора

Будем предполагать, что множество А объектов конечно и оценивается набором из m критериальных функций fj, j ∈ J. Необходимо построить многокритериальные механизмы выбора «лучших» объектов из исходного множества объектов, базирующихся на результирующих отношениях с k-ым порядком строгого предпочтения объектов (по Рамееву-Корнеенко), к которым можно отнести следующие.

2.1. Механизм выбора доминирующих объектов: $\mathcal{M}_* = \langle A,\ F,\ \sigma = \{\succ^k\}_{k=1}^m, \pi_* \rangle$, в котором выбор объектов выполняется по правилу π_* в виде:

(2.1) $\pi_*: A \to A_k^* = C_k^*(A), k = \overline{1,m},$

где $C_k^*(A) = \{a_q^* \in A \mid \exists a_q^* \succ^k a_l, \forall a_l \in A\}$ – множество доминирующих объектов;

$\succ^k$ – результирующие отношения доминирования с k-ым порядком строгого предпочтения; $F = \{f_j: j = 1 \div m\}$ – набор критериев.

2.2. Механизм выбора недоминируемых k-эффективных объектов:

$$\mathcal{M}_{nd} = \langle A,\ F,\ \sigma = \{\succ^k\}_{k=1}^m, \pi_{nd} \rangle,$$

в котором выбор объектов выполняется по правилу π_{nd} в виде:

(2.2) $\pi_{nd}: A \to A_k^{nd} = C_k^{nd}(A),\ k = \overline{1,m},$

где $C_k^{nd}(A) = \{a_q \in A \mid \nexists\, a_l \succ^k a_q, \forall a_l \in A\}$ – множество недоминируемых k-эффективных объектов по набору критериев $F = \{f_j: j = 1 \div m\}$.

2.3. Механизм сужения множества недоминируемых (k-эффективных) объектов по убывающему подсемейству критериев:

$$\mathcal{M}_t = \langle A,\ \mathcal{F} = \{F_t\}_{t=m}^1,\ F_{t-1} \subset F_t,\ \sigma = \{\succ^k\}_{k=1}^m, \pi_t^{(k)}, t = m, m-1, \dots, k \rangle,$$

в котором сужение k-эффективных объектов при последовательном уменьшении числа критериев выполняется по правилу $\pi_t^{(k)}$:

(2.3) $\pi_t^{(k)}: A_{k(t)}^{nd} \to A_{k(t-1)}^{nd} = C\big(A_{k(t)}^{nd}\big),\ \ t = m, m-1, \dots, k,$

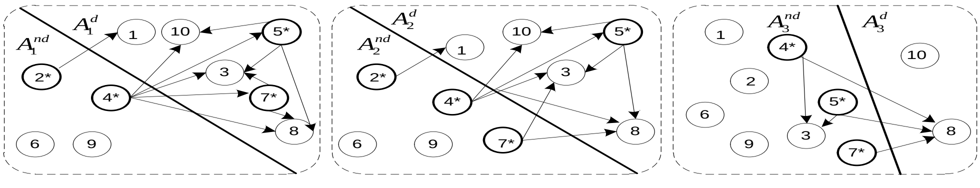
где $F_{t-1} = F_t \backslash \{f_{j_i}\}$, $f_{j_i} \in F_t$; $\mathcal{F} = \{F_t \mid t = m, m-1, \dots, k\}$ – семейство $F_t = \{f_{j_1}, \dots, f_{j_i}, \dots, f_{j_t}\}$, $i \in \overline{1,t}$, критериальных функций;

$A_{k(t)}^{nd}$ – множество k-эффективных (недоминируемых) объектов по подсемейству F_t несоизмеримых критериальных функции.

Примеры выбора объектов, в качестве которых можно рассматривать проекты с исходными данными (см. табл. 1)., различными механизмами выбора по трём критериям в 10-ти балльной шкале представлены на рис. 1.

Таблица 1. Исходные данные

Критерии	Объекты									
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
f_1	2	4	6	7	7	10	6	5	6	7
f_2	8	8	7	8	8	3	8	7	6	5
f_3	7	10	1	6	5	9	6	3	8	1



а) выбор объектов при k = 1; б) выбор объектов при k = 2; в) выбор объектов при k = 3

Рис. 1. Результаты выбора объектов различными механизмами выбора

Рассмотрим следующую теорему, имеющую важное значение для сужения множества k-эффективных объектов при решении многокритериальных задач выбора.

Теорема 1 (Корнеенко). Пусть на множестве объектов А справедливы результирующие отношения доминирования с k-ым порядком строгого предпочтения $\succ^k$ (1.2).

Тогда для функции выбора C_k^{nd} (2.2) справедливо включение

(2.4) $A_1^{nd} \subseteq A_2^{nd} \subseteq \cdots \subseteq A_k^{nd} \subseteq A_{k+1}^{nd} \subseteq \cdots \subseteq A_m^{nd}$, k = 1, 2,…, m.

где A_k^{nd} – множество недоминируемых k-эффективных объектов по набору критериев $F = \{f_j: j = 1 \div m\}$.

Доказательство. Для справедливости включения (2.4) достаточно убедиться в справедливости $A_k^{nd} \subseteq A_{k+1}^{nd}$ включения для смежных множеств недоминируемых объектов A_k^{nd}, A_{k+1}^{nd}, $k = \overline{1,m}$. (подробно доказательство см. в [4]).

Заключение

Предложенные механизмы многокритериального выбора, базирующиеся на отношениях доминирования с k-ым порядком строгого предпочтения, позволяют сделать окончательный выбор из суженного исходного множества эффективных объектов (проектов), оценки которых предварительно должны сведены к единой порядковой шкале.

Литература

1. *Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т.* Выбор вариантов: основы теории. – М.: Наука, 1990. – 240 с.
2. *Рамеев О.А.* Методы выбора решений в организационных системах. – М.: ИКСИ, 1991. – 103 с.
3. *Корнеенко В.П.* Задача выбора стратегии модернизации предприятия на динамической модели оптимального управления процессом развития в условиях ограниченных ресурсов // Стратегическое планирование и развитие предприятий. Материалы двенадцатого всероссийского симпозиума. Секция 1. Теоретические проблемы стратегического планирования на микроэкономическом уровне. Москва, 12-13 апреля 2011 г. Под ред. Чл.-корр. РАН Г.Б. Клейнера. – М.: ЦЭМИ РАН, 2011. – С.80 – 82.
4. *Корнеенко В.П.* Методы многокритериального оценивания объектов с многоуровневой структурой показателей эффективности: монография. – М.: МАКС Пресс, 2018. – 292 с.
5. *Fishburn P.C.* Nonlinear preference and utility theory. Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1988.