МЕХАНИЗМЫ СОГЛАСОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СЕТЕВЫХ СТРУКТУРАХ[39]

Еналеев А.К.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная д.65
anverena@mail.ru

Аннотация: Рассматриваются задачи формирования иерархических отношений между агентами, имеющими собственные цели, в сетевой структуре взаимодействия агентов. Такие отношения определяются предоставлением права первого хода отдельным агентам. Для решения этой задачи предлагается использовать механизмы согласованного планирования и стимулирования.

Ключевые слова: Согласование, принятие решений, степень децентрализации, равновесие, сеть, план, стимулирование, оптимальность.

Введение

Сложность управления организационными системами, состоящими из большого количества агентов, взаимодействие которых описывается сетевой структурой связей, приводит к необходимости формирования иерархических структур соподчинения агентов друг другу или дополнительным органам управления, а также к допущению определенной децентрализации принятия решений в системе. При исследовании таких систем возникают проблемы организации степени соподчинения агентов и выбора степени децентрализации, приводящие к формированию иерархических структур. Отметим, что изучению этих проблем посвящено очень большое число научных работ. В большинстве этих работ необходимость формирования иерархических структур связывают с невозможностью обработки больших объемов информации единственным органом управления (Центром), вычислительной сложностью задачи расчета Центром оптимального плана, недостаточной информированностью Центра об агентах, наличием собственных целей у агентов и стремлении получить ими наибольший выигрыш при принятии решений.

В последнем случае проблема приобретает игровую постановку. В этом случае требуется согласовывать действия агентов, учитывая их целенаправленное поведение. Согласование целей агентов и принимаемых ими решений можно осуществлять путем разработки механизмов управления [1]. В докладе делается акцент на исследовании именно этого случая. В [2,3] такого типа задача рассматривалась для случая, так называемых компенсаторных функций стимулирования по отношению к функциям затрат агентов.

1 Описание модели и постановка задачи

Рассмотрим ориентированный граф $G=(I, A)$ без контуров, где I обозначает множество, состоящее из n вершин, A – множество дуг. Для графа без контуров возможна такая нумерация вершин, при которой все дуги $(i, j) \in A$ удовлетворяют следующему свойству: $j > i$, если i – номер вершины, из которой выходит дуга, а j – номер вершины, в которую входит дуга. В [4] показана возможность такой нумерации вершин для графа без контуров, и такая нумерация названа «правильной». Будем считать, что исходная нумерация вершин графа является «правильной». Для простоты и, по существу, без ограничения общности предположим, что конечная вершина графа, в которую входит хотя бы одна дуга и ни одной не выходит, единственна и имеет номер n. Обозначим J_i множество номеров вершин, от которых дуги направлены в вершину с номером i.

Примем, что вершине с номером i соответствует агент, принимающий решение y_i , где $i=1,\ldots, n$; $y_i \in Y_i(\bar{y}^i)$, $Y_i(\bar{y}^i)$ – множество допустимых решений i-го агента, $\bar{y}^i = \{y_j,\ j \in J_i\}$ – набор решений агентов с номерами из множества J_i. Будем считать, что множества $Y_i(\bar{y}^i)$ компактны и $Y_i(\bar{y}^i) \subset Y$ где Y – множество с заданной топологией.

Пусть дугам соответствуют функции $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(k_{ij} y_j, y_i) \geq 0$ потерь за отклонение решения y_i от взвешенного решения $k_{ij}y_j$ агента с номером $j \in J_i$, где k_{ij} – заданные коэффициенты, характеризующие соответствие решений y_i и y_j агентов i и j, $\lambda_{ij}(y_i, y_i) = 0$. Для всех агентов

[39] *Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ и ОАО «РЖД» в рамках научного проекта №17-20-05216.*

определим целевые функции $f_i(x_i, y_i, \bar{y}_{-i}) = h_i(y_i) - \chi_i(x_i, y_i) - \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}(k_{ij} y_j, y_i)$, где $\bar{y}_{-i} = (y_1, ..., y_{i-1}, y_{i+1}, ..., y_n)$ – совокупность решений всех агентов за исключением i-го агента; $h_i(y_i)$ – функция дохода, либо функция затрат, i-го агента от реализации решения y_i; $\chi_i(x_i, y_i)$ – штрафы, устанавливаемые Центром агенту за отклонение решения y_i от назначенного Центром плана x_i, $x_i \in Y$, $\chi_i(x_i, y_i) \geq 0$, $\chi_i(y_i, y_i) = 0$. Предположим, что функция $h_i(y_i)$ полунепрерывна сверху, а $\chi_i(x_i, y_i)$ и $\lambda_{ij}(k_{ij} y_j, y_i)$ полунепрерывны снизу по всем переменным, каждый из которых может принимать значение на множестве Y. Пусть также задана целевая функция центра $F(\bar{x}, \bar{y})$, где $\bar{x}$ – совокупность всех планов, $\bar{y}$ – совокупность решений всех агентов. Предположим, что $F(\bar{x}, \bar{y})$ также полунепрерывна по всем своим аргументам.

Агенты последовательно в порядке их нумерации выбирают решения y_i^* из условия

(1) $$y_i^* \in Z_i(\bar{y}^{*i}) = \operatorname{Arg} \max_{y_i \in Y_i(\bar{y}^{*i})} f_i(x_i, y_i, \bar{y}^{*i}).$$

Обозначим $Z = Z(\bar{x}, \bar{\chi})$ множество стратегий всех агентов, удовлетворяющих условию (1) и рассмотрим показатель эффективности системы $K(\bar{x}, \bar{\chi}) = \inf_{\bar{y}^* \in Z(\bar{x}, \bar{\chi})} F(\bar{x}, \bar{y})$. Здесь зависимость множества Z от $\bar{x}$ и $\bar{\chi}$ обозначена потому, что предполагается, что Центр может выбирать механизм управления, т.е. планы x_i и функции штрафов $\chi_i(.,.)$ из заданных множеств Y и Θ_i. В качестве множеств Θ_i допустимых функций штрафов $\chi_i(.,.)$ будем рассматривать $\Theta_i = \{\chi_i(.,.) \mid \chi_i(x, y) - \chi_i(x, v) \leq \theta_i(v, y), \forall x, y, v \in Y\}$, где $\theta_i(.,.)$ заданные показатели роста для функций штрафов [4], удовлетворяющие неравенству «треугольника» $\theta_i(x, y) \leq \theta_i(x, v) + \theta_i(v, y)$ при $\forall x, y, v \in Y$ *Постановка задачи*. Определить оптимальные планы и оптимальные функции штрафов $(\bar{x}^*, \bar{\chi}^*)$:

(2) $$K(\bar{x}^*, \bar{\chi}^*) \geq \sup_{(\bar{x}, \bar{\chi}) \in M} K(\bar{x}, \bar{\chi}) - \varepsilon,$$

где $M = (Y, \Theta)$ – множество допустимых механизмов, $\Theta = (\Theta_1, ..., \Theta_n)$, ε – достаточно малое положительное число.

В случае, когда все $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(k_{ij} y_j, y_i) = 0$, в [5] для задачи (2) показано, что оптимальные планы содержится в множестве согласованных планов, т.е. планов, которые агентам выгодно выполнять, а оптимальные функции штрафов совпадают с их показателями максимального роста $\theta_i(x_i, y_i)$. Заметим, что в этом случае эти показатели характеризуют степень централизации: если $\theta_i^1(x_i, y_i) > \theta_i^2(x_i, y_i)$, то для штрафов с индексом 1 степень централизации выше, чем для штрафов 2.

2 Оптимальность механизмов согласованного управления

Пусть показатели роста ограничены некоторыми константами, $\theta_i(x_i, y_i) \leq c_i$ и $\sum c_i \leq C$, где C – заданная величина.

Рассмотрим случай, когда $\lambda_{ij} = 0$; $h_i(y_i) = -\zeta_i(y_i)$, где y_i – действительные числа, $y_i \geq 0$, $\zeta_i(y_i)$ – функции затрат, монотонно возрастающие по своему аргументу, $\zeta_i(0) = 0$; $F(\bar{x}, \bar{y}) = H(y_1, ..., y_n) - \sum_i (c_i - \chi_i(x_i, y_i))$, где $\chi_i(x_i, y_i) \in \Theta_i$, функция $H(y_1, ..., y_n)$ монотонно возрастает по y_i, i=1,…, n.

Теорема 1. Оптимальное решение задачи централизованного управления (2) определяется из решения задачи: определить набор чисел $\bar{c}^* = (c_1^*, ..., c_n^*)$ и планов $\bar{x}^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ таких, что $H(x_1^*, ..., x_n^*) + \sum_i c_i^* = \max_{\bar{x}, \bar{c}} (H(x_1, ..., x_n) + \sum_i c_i)$, где $x_i \in Y_i(\bar{x}^i)$, $\zeta_i(x_i) = c_i$, $\sum c_i \leq C$, i=1,…, n. При этом оптимальные функции штрафов равны $\chi_i^*(x_i, y_i) = \begin{cases} 0, & \text{если } y_i = x_i \\ c_i & \text{в противном случае} \end{cases}$, и $y_i^* = x_i^*$ как доминантные стратегии.

Данная теорема обобщает результат [2] об оптимальности механизма с компенсаторными функциями поощрения в сетевых структурах [2,3].

Теорема 2. Если $\chi_i(x_i, y_i) = \theta_i(x_i, y_i)$ для всех $i=1,\ldots, n$, то решения $\overline{y}^* = \overline{x}^*$ представляют собой равновесия по Нэшу в игре n агентов, где $\overline{x}^* \in X^* = \{x_i \ / \ x_i \in P_i(\overline{x}_{-i}), i = 1,\ldots,n\}$,

$$P_i(\overline{x}_{-i}) = \{x_i \in Y_i(\overline{x}^i) | h_i(x_i) - \sum_{j=1 \ j\neq i}^{n} \lambda_{ji}(k_{ij}x_j, x_i) \geq h_i(y_i) - \chi_i(x_i, y_i) - \sum_{j=1 \ j\neq i}^{n} \lambda_{ji}(k_{ij}x_j, y_i), \ \forall y_i \in Y_i(\overline{y}^i)\}.$$

Множества $P_i(\overline{x}_{-i})$ назовем множествами согласованных планов.

Рассмотрим функции штрафов вида $\chi_i(x_i, y_i) = \chi_i^0(x_i, y_i) + \sum_{j\neq i, \ j=1}^{n} \delta_{ij}(x_i, y_i)$, где $\delta_{ji}(y_j, y_i) \geq \max_{z\in Y}[\lambda_{ji}(z, y_i) - \lambda_{ji}(z, y_j)]$.

Теорема 3. Если функции $\chi_i^0(x_i, y_i)$ удовлетворяют неравенству «треугольника» и $x_i \in P_i^0(\overline{x}^i) = \{x \in Y_i(\overline{x}^i) | h_i(x) \geq h_i(y_i) - \chi_i^0(x, y_i), \ y_i \in Y_i(\overline{x}^i)\}$, то $\overline{y}^* = \overline{x}$ как доминантные стратегии.

Предположим, для простоты, что все веса $k_{ij} = 1$. Пусть теперь в системе имеется определенная асимметрия, касающаяся функций потерь $\lambda_{ij}(y_j, y_i)$. Пусть имеется некоторый агент, например, с номером l, такой что для всех $j \in I$ выполняются неравенства

(3) $$\lambda_{lj}(y_j, y_l) < \lambda_{jl}(y_l, y_j).$$

Неравенства (3) означают, что потери l-го агента от несовпадения с решением любого другого агента меньше, чем потери этого агента от несовпадения его решения с решением l-го агента.

В этом случае Центр может управлять опосредованно выбором всех агентов путем назначения согласованного плана и функции штрафов только для l-го агента. Таким образом l-й агент формирует уровень иерархии.

Теорема 4. Пусть функции $\lambda_{ij}(y_j, y_i)$ удовлетворяют неравенству «треугольника», т.е. $\lambda_{ij}(y_j, y_i) = \delta_{ji}(y_j, y_i)$, и справедливы неравенства (3), тогда если $x_l \in P_l^0(\overline{x}^l) \cap P_l(\overline{x}_{-l})$, то $y_i^* = x_l$ для всех $i=1,\ldots, n$.

Литература

1. *Бурков В.Н.* Основы математической теории активных систем. – М.: Наука, 1977. – 256с.
2. *Новиков Д.А.* Теория управления организационными системами. – М.: Физматлит, 2007. – 584с.
3. *Белов М.В., Новиков Д.А.* Сетевые активные системы: модели планирования и стимулирования // Проблемы управления. 2018. № 1. – С.47-57.
4. *Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А.* Теория графов в управлении организационными системами. – М.: Изд-во Синтег, 2001. – 124с.
5. *Еналеев А. К.* Оптимальность согласованных механизмов функционирования в активных системах // Управление большими системами. 2011. Выпуск 33. – С.143-166.
6. *Enaleev A.K.* Optimal incentive-compatible mechanisms in active systems // Automation and Remote Control. 2013. Vol. 74, No. 3. – P.491-505.