ПРИНЦИПЫ ОПТИМАЛЬНОСТИ В СТОХАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ФОНДОВОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ

Горелик В.А.[1], Золотова Т.В.[2]

[1]ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Россия, г. Москва, ул. Вавилова д.40

[2]Финансовый университет при Правительстве РФ,

Россия, г. Москва, Ленинградский пр. д.49

gorelik@ccas.ru, tgold11@mail.ru

Аннотация: Предложен подход к выбору критериев оптимальности в стохастических задачах инвестирования, моделируемых в виде игр с природой с известными вероятностями состояний. Этот подход основан на совместном использовании критериев эффективности (математическое ожидание) и риска (типа VAR). Для возникающей двухкритериальной задачи в качестве способа формализации использован метод перевода одного критерия в ограничение. Рассматривается случай чистых стратегий (выбор одного варианта инвестиций) и случай смешанных стратегий (диверсификация вложения средств).

Ключевые слова: игра с природой, эффективность, риск, чистая стратегия, смешанная стратегия

В реальных процессах принятия решений в сложных системах, в частности, в задачах фондового инвестирования, лицо принимающее решение (ЛПР) действует в условиях неполной информации относительно будущего состояния системы и, следовательно, результатов своей деятельности [1]. Математическая модель подобных ситуаций называется «игрой с природой», а учет неопределенности и нейтрализация связанных с ней потерь при выборе решения называется управлением риском. Различают случаи вероятностной неопределенности, когда имеется информация о вероятностях состояния природы, и полной неопределенности, когда такой информации нет. Здесь мы рассмотрим двухкритериальный подход «эффективность – риск» для первого случая, который будем называть принятием решений в стохастических условиях. Для второго случая, т.е. принятия решений в условиях неопределенности, аналогичный подход рассматривался в [2].

Рассмотрим ситуацию, когда ЛПР может выбирать одну из стратегий (альтернатив) $i = 1,...,n$, при известном наборе возможных вариантов состояний внешней среды (природы) $j = 1,...,m$. Выигрыш от i-го решения при j-м состоянии внешней среды есть a_{ij}. Матрица выигрышей от реализации возможных решений есть $A = \| a_{ij} \|$. Вероятности состояний природы q_j будем считать известными. ЛПР необходимо выбрать ту стратегию, которая приведет по возможности к большему выигрышу, но при этом возможные потери вследствие неполноты информации будут как можно меньше.

Наряду с матрицей выигрышей в играх с природой часто вводят матрицу риска, которая определяется следующим образом. Разность между выигрышем, который получает ЛПР, зная состояние внешней среды j, и выигрышем, который будет получен в ситуации, когда ЛПР выберет произвольную стратегию i, а состояние внешней среды окажется тем же j, называется риском при использовании стратегии i в условиях состояния j и обозначается r_{ij}. Матрица $R = \| r_{ij} \|$ называется матрицей риска, ее элементы $r_{ij} = \max\limits_{1 \le k \le n} a_{kj} - a_{ij} \ge 0$.

В условиях неопределенности если ЛПР использует гарантированный подход к выбору решения, предполагая, что внешняя среда (природа) действует по отношению к нему наихудшим образом, то он применяет критерий Вальда $W = \max\limits_{1 \le i \le n} \min\limits_{1 \le j \le m} a_{ij}$.

Если ЛПР, стремясь избежать возможных потерь вследствие неполноты информации, выбирает ту стратегию (альтернативу), которая гарантирует минимальный риск, то он использует критерий Сэвиджа $S = \min\limits_{1 \le i \le n} \max\limits_{1 \le j \le m} r_{ij}$.

Эти критерии в общем случае дают разные оптимальные стратегии, поэтому имеет смысл подход, состоящий в их совместном использовании в условиях неопределенности (см. [2]). Однако в стохастических условиях дело обстоит иначе. Если в данном случае в качестве оценки эффективности стратегии i принять математическое ожидание выигрыша $\bar{a}_i = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} q_j$, а в качестве оценки риска $\bar{r}_i = \sum\limits_{j=1}^{m} r_{ij} q_j$, то имеет место равенство $\bar{a}_i + \bar{r}_i = \sum\limits_{j=1}^{m} (\max\limits_{1 \le i \le n} a_{ij}) q_j = C$. Поэтому одна и та же стратегия максимизирует средний выигрыш и минимизирует средний риск.

Таким образом, если мы хотим применить двухкритериальный подход «эффективность – риск» при выборе решения, то оценка риска по Сэвиджу нам не подходит. При дальнейшем изложении мы будем использовать функцию VAR, которую в русском переводе можно назвать «значение при риске». Эта функция определяется как вероятность события, при котором выигрыш ЛПР не больше некоторого порогового значения, выступающего в качестве аргумента. Для определения этой функции при фиксированной чистой стратегии i надо произвести перестановку элементов в порядке роста в данной строке матрицы A и построить ступенчатую функцию распределения вероятностей. Введем обозначение для условной вероятности выигрыша не больше x при условии применении i-й чистой стратегии $P_i(x)$. При построении функции распределения для параметра x достаточно взять дискретные значения, равные элементам строки в порядке роста, а вероятность вычисляется путем суммирования q_j от индекса минимального элемента до индекса последнего не превосходящего x элемента.

Пример 1. Дана матрица выигрышей $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 16 & 1 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ и вероятности состояний природы q_1=0.5, q_2=0.25, q_3=0.25. Тогда $\bar{a}_1$=3.25, $\bar{a}_2$=5.25, $\bar{a}_3$=3.5, $P_1(2)$=0.25, $P_1(3)$=0.5, $P_1(4)$=1, $P_2(1)$=0.25, $P_2(2)$=0.75, $P_2(16)$=1, $P_3(1)$=0.5, $P_3(5)$=0.75, $P_3(7)$=1.

Если, например, для параметра x функции VAR взять значение равное 2, то $P_1(2)$=0.25, $P_2(2)$=0.75, $P_3(2)$=0.5. Если в качестве единственного критерия взять средний выигрыш, подлежащий максимизации, то оптимальна 2-я стратегия. Если в качестве единственного критерия взять вероятность выигрыша не больше 2 и его минимизировать, то оптимальна 1-я стратегия.

Таким образом, неясно на какой из этих критериев следует ориентироваться при выборе оптимальной стратегии. Хотелось бы согласно критерию математического ожидания иметь выигрыш больше в среднем, а согласно критерию VAR –поменьше вероятность неблагоприятного исхода. Особенно это очевидно, когда речь идет о вероятности отрицательного результата, т.е. потерь. Использование для выбора оптимальной стратегии только одного критерия становится недостаточным. Приходим к двухкритериальной задаче, которую необходимо каким-то способом формализовать.

Рассмотрим постановку задачи двухкритериальной оптимизации, в которой один из критериев переведен в ограничение. Если в ограничении – функция VAR с пороговым значением r_0, то получаем задачу

$$(1)\quad \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j \to \max_{i\in I}, \quad I = \{i \mid P_i(x) \le r_0\}$$

Процедура вычисления $P_i(x)$ состоит в следующем. Обозначим через π_i перестановку элементов i-й строки в порядке роста. В результате применения перестановки $\pi_i(a_{i1},\ldots,a_{im})$ получаем строку $a_{ij_1},\ldots,a_{ij_m}$. Тогда

$$(2)\quad P_i(x) = \sum_{j=j_1}^{j_k} q_j \ ,$$

где j_k определяется из условия $a_{ij_k} \le x < a_{ij_{k+1}}$. При этом считаем, что если $x < a_{ij_1}$, то $P_i(x) = 0$, а если $a_{ij_m} \le x$, то $P_i(x) = 1$.

Пусть в примере 1 при x=2 пороговое значение есть r_0=0.5, тогда ограничение в задаче (1) выполняется для стратегий 1 и 3, и решением задачи (1) является 1-я стратегия.

Рассмотрим теперь вопрос: имеет ли смысл использование смешанной стратегии при такой постановке. Ответ на этот вопрос не очевиден, т.к. при известных вероятностях состояний природы максимум математического ожидания выигрыша достигается на чистых стратегиях. Но при данном подходе ответ оказывается положительным.

Итак, общая постановка задачи имеет вид

$$(3)\quad \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i p_i \to \max_{p\in S}, \quad S = \{p \mid \sum_{i=1}^{n} p_i P_i(x) \le r_0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ p_i \ge 0,\ i = 1,\ldots,n\}.$$

В задаче линейного программирования (3) имеется два ограничения, поэтому в общем случае решение может содержать не больше двух ненулевых переменных.

Пример 2. Возьмем данные из примера 1. Тогда задача (3) примет вид:

$$3.25p_1 + 5.25p_2 + 3.5p_3 \to \max_p,$$

$$0.25p_1 + 0.75p_2 + 0.5p_3 \le 0.5, \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1,\ p_i \ge 0,\ i = 1,2,3.$$

Решение этой задачи есть $p^0 = (0.5, 0.5, 0)$.

Если в ограничении – математическое ожидание с пороговым значением a_0, то для случая чистых стратегий получаем задачу

$$(4)\quad P_i(x) \to \min_{i \in I_1}, \quad I_1 = \{i \mid \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j \ge a_0\}.$$

Для случая смешанных стратегий соответственно имеем задачу

$$(5)\quad \sum_{i=1}^{n} p_i P_i(x) \to \min_{p \in S_1}, \quad S_1 = \{p \mid \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i p_i \ge a_0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ p_i \ge 0,\ i = 1,\dots,n\}.$$

Пример 3. Пусть a_0=3.3. Тогда для данных из примера 1 при x=2 ограничения выполняются для 2-й и 3-й стратегии. Но для 3-й стратегии функция VAR принимает меньшее значение, следовательно, оптимальна 3-я стратегия. Для случая смешанных стратегий имеем задачу

$$0.25p_1 + 0.75p_2 + 0.5p_3 \to \min_p,$$

$$3.25p_1 + 5.25p_2 + 3.5p_3 \ge 3.3, \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1,\ p_i \ge 0,\ i = 1,2,3.$$

Решение этой задачи есть $p^0 = (0.975, 0.025, 0)$.

Изложенный подход к выбору оптимальной стратегии был применен в задаче краткосрочного инвестирования средств в акции российских телекоммуникационных компаний. Инвесторы, принимая решение на фондовом рынке, прогнозируют будущие цены (или доходности) финансовых инструментов. В свою очередь при прогнозировании будущих доходностей можно использовать фундаментальный или технический анализ. Фундаментальный анализ основан на исследовании закономерностей, которые определяют стратегию в долгосрочной перспективе, а технический анализ предполагает исследование предыдущих значений показателей финансовых инструментов (например, доходностей) для кратковременных сделок [3]. Был проведен технический анализ и найдены оптимальные стратегии инвестирования по реальным данным о котировках акций трех компаний: Мегафон, МГТС, Ростелеком за период с 01.10.2018 по 31.12.2018. Например, решение задачи (5) минимизации вероятности потерь не менее чем 0.1% с ограничением на среднее значение доходности не менее 0.1% дало оптимальную смешанную стратегию $p^0 = (0.16, 0, 0.84)$, т.е. вложение в акции компаний Мегафон и Ростелеком в пропорции 4:21.

Литература

1. *Vasilyev S. and Tsvirkun A*. “Problems of managing the development of large-scale systems in modern conditions”, 10th International Conference Management of Large-Scale System Development, Proceedings, IEEE Conference Publications, 2017. pp.1-5.

2. *Горелик В.А., Золотова Т.В.* Принципы оптимальности в задачах управления крупномасштабными системами// Управление развитием крупномасштабных систем: Труды 11 международной конференции. Том 1. С.252-258. М.: ИПУ РАН, 2018.

3. Шарп Уильям Ф., Александер Гордон Дж., Бэйли Джефри В. Инвестиции. М.: ИНФРА-М, 2018.–1028с.