ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ФОРМИРОВАНИЮ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОГРАММ В СЕТЕВЫХ СТРУКТУРАХ[38]

Бурков В.Н., Еналеев А.К.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная д.65
vlab17@bk.ru, anverena@mail.ru

Аннотация: Рассматривается задача инвестирования средств для выполнения связанных между собой проектов и работ сложной производственной или научно-технической программы в условиях недостаточного финансирования. В этом случае часть проектов приходится исключить из программы. Описываются алгоритмы выбора оптимального набора приоритетных проектов для финансирования.

Ключевые слова: Распределение ресурса, дискретная оптимизация, задача о ранце, сетевая структура проектов.

Введение

При разработке стратегий и программ развития, а также сложных научно-технических проектов, включающих в состав фундаментальные и прикладные исследования, опытно-конструкторские работы, создание прототипов изделия и пр. обычно в силу недостатка финансовых и других ресурсов приходится решать задачу выделения наиболее приоритетных работ и определения их оптимального финансирования. Ниже для обозначения этих объектов (стратегий, программ развития, сложных проектов и др.) будем использовать термин инвестиционная программа или коротко программа, а для элементов этой программы термин – работа. Связи между отдельными проектами и работами, составляющие программу можно описать с помощью ориентированного графа без контуров. Вершинам графа приписываются работы, являющиеся претендентами для включения в программу, а дуги определяют порядок предшествования этих работ [1]. Возможно также и другое описание порядка выполнения с помощью графа, в котором дуги определяют некоторую предполагаемую работу для включения в программу, а вершины определяют событие завершения работы программы. Такое описание задает последовательность упорядоченных событий. В настоящем докладе рассматривается именно такое представление программы.

Для выполнения каждой работы требуется заданное финансирование, и завершенная работа характеризуется некоторым заданным эффектом. Возникает задача оптимального размещения финансирования между работами, обеспечивающее получение максимального суммарного эффекта. Особенность рассматриваемой задачи заключается в следующем: в случае недостаточного финансирования некоторой работы она не может быть завершена, соответственно, не могут быть выполнены все последующие работы, которые зависят от результата этой работы. Это вынуждает исключить такие работы из состава инвестиционной программы.

Рассматриваемые ниже модель и метод дополняют результаты из [1,2].

1 Описание модели и постановка задачи

Рассматриваемая задача может быть описана математической моделью, сводящейся к задаче о ранце с сетевыми ограничениями (Preceding Constrained Knapsack Problem). Эта задача относится к классу NP-трудных задач [3]. Для ряда частных случаев предложены эффективные алгоритмы решения [1-3]. В докладе рассматривается еще один частный случай, допускающий эффективный алгоритм решения. При разработке предложенных алгоритмов используются подходы, разработанные в [4,5].

Пусть сетевые ограничения задаются сетью с упорядоченными событиями рис.1.

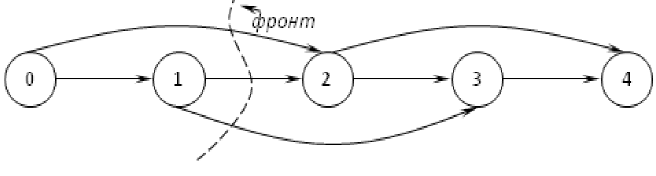

Рис. 1. Пример упорядоченных событий

[38] *Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ и ОАО «РЖД» в рамках научного проекта №17-20-05216 и проекта РНФ 16-19-10609.*

В этой сети дуги соответствуют работам, а вершины событиям, причем события совершаются в очередности их номеров. Эта очередность определяется либо тем, что существует путь, проходящий через все события, либо из соображения нумерации событий, связанных с правилом нумерации работ, описанным в [1]. При этом номер событию назначается в порядке номеров завершения упорядоченных (согласно [1]) работ, обеспечивающих выполнение последующей работы.

Для каждой работы задана ее ценность a_{ij} и вес b_{ij} (например, величина расходов на ее выполнение). Задано также ограничение на суммарный вес (суммарный объем финансирования). Требуется определить множество выполняемых работ, такое что их суммарная ценность максимальна при ограничениях на суммарные расходы, с учетом сетевых ограничений.

Обозначим x_{ij}=1, если работа (i,j) входит в множество выполняемых работ, x_{ij}=0 в противном случае. Сетевые ограничения можно записать следующим образом:

$$\begin{array}{l} \text{если } x_{ij}=1, \text{ то } x_{ki}=1,\ (ki)\in V, \\ \text{если } x_{ij}=0, \text{ то } x_{jk}=0,\ (jk)\in V, \end{array} \tag{1}$$

где V – множество дуг сети.

Первое условие означает, что если работа (i,j) выполняется, то выполнены и все предшествующие ей работы. Второе условие означает, что если работа (i,j) не выполняется, то не могут выполняться и все следующие за ней работы.

Дадим математическую постановку задачи.

Задача. Определить $\overline{x}=\{x_{ij}:(i,j)\in V\}$, максимизирующие суммарную эффективность

$$A(\overline{x})=\sum_{(i,j)\in V} a_{ij}x_{ij} \tag{2}$$

при ограничениях (1) и (3)

$$B(\overline{x})=\sum_{(i,j)\in B} b_{ij}x_{ij}\le B, \tag{3}$$

где B – ограничение на суммарные расходы (фонд финансирования).

Определение. Фронтом работ F_s между событиями s и (s+1) называется множество работ (i,j), таких что $i\le s,\ j\ge s+1$.

На рис.1 пунктирной линией показан пример фронта работ F_1, содержащий работы (0,2), (1,2) и (1,3).

2 Метод решения

Обозначим Q_s множество работ, предшествующих событию s (для любых $(i,j)\in V$, имеет место $i\le s$). Пусть в оптимальном решении выполняются все работы множества Q_s и не выполняется хотя бы одна работа множества Q_{s+1}. В этом случае в решение задачи входят все работы фронта Q_s и некоторые работы фронта F_s. Выбор работ фронта F_s определяется из решения задачи о ранце:

Максимизировать

$$\sum_{(i,j)\in F_s} a_{ij}x_{ij} \tag{4}$$

при ограничении

$$\sum_{(i,j)\in F_s} b_{ij}x_{ij}\le B-\sum_{(i,j)\in Q_s} b_{ij}x_{ij}. \tag{5}$$

Задачу (4), (5) решаем для всех s, таких что $\sum_{(i,j)\in Q_s} b_{ij}x_{ij}\le B$.

Обозначим A_s значение (4) в оптимальном решении. Из всех решений выбираем решение с максимальной величиной A_s.

Теорема. Описанный выше алгоритм дает оптимальное решение задачи.

Доказательство. Достаточно доказать, что любое допустимое решение задачи состоит из всех работ множества Q_s и работ фронта F_s. Предположим, что найдется работа (i,j), где i>s+1. Но в этом случае должны быть выполнены все работы множества Q_i и, возможно, работы фронта F_i. Теорема доказана.

Описанный алгоритм эффективен в случае однозначного упорядочения работ, т.к. сводится к решению последовательности задач о рюкзаке малой размерности.

Литература

1. *Бурков В.Н., Еналеев А.К.* Обобщенная задача о ранце // Труды 11 международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD 2018)» 1-3 октября 2018, Москва, Россия, М: ИПУ РАН, Т.1. – С.117-123.
2. *Бурков В.Н., Еналеев А.К., Ходунов А.М*. Эффективный алгоритм для частного случая задачи о ранце с сетевыми ограничениями (в печати).
3. *Merer H.K., Pferschy U., Pisinger D*. Knapsack Problem. Berlin, Heidelberg: Springer–Vertlag. 2004. – 546p.
4. *Бурков В.Н., Буркова И.В., Кашенков А*.Р. Структурно-эквивалентные функции в задачах дискретной оптимизации. Проблемы управления. 2007 №1. – С.13-19.
5. *Буркова И.В*. Метод сетевого программирования в задачах нелинейной оптимизации //Автоматика и телемеханика. Т.18. 2009, №1. – С.15-21.